

Udako kalkulo ariketak



LIZARRALDEA BHI



Udako lana:

Urtez urte, kurtso hasieran, irakasleok ikusten dugu kurtsoan zehar landutako eta gainditutako edukiak ahazten dituztela.

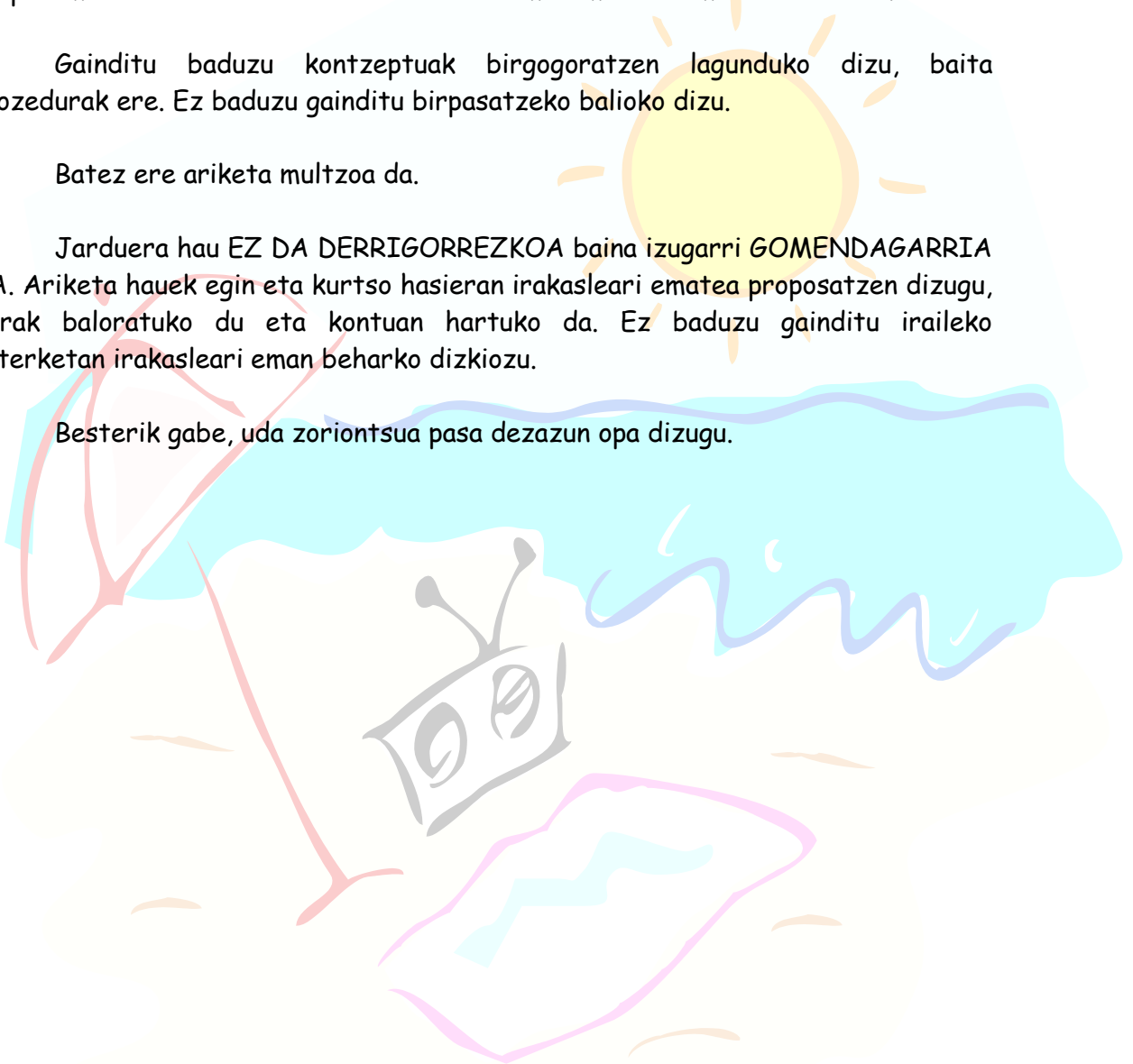
Hau ekiditeko Lizarraldeko BHI institutuko Matematika departamentuak ariketa multzo hau prestatu du. Udan zehar denbora asko duzu eta gure proposamena denbora horretako zatitxo bat matematikei ematea litzateke.

Gainditu baduzu kontzeptuak birgogoratzen lagunduko dizu, baita prozedurak ere. Ez baduzu gainditu birpatsatzeko balioko dizu.

Batez ere ariketa multzoa da.

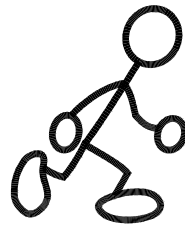
Jarduera hau EZ DA DERRIGORREZKOA baina izugarri GOMENDAGARRIA DA. Ariketa hauek egin eta kurtso hasieran irakasleari ematea proposatzen dizugu, berak baloratuko du eta kontuan hartuko da. Ez baduzu gainditu iraileko azterketan irakasleari eman beharko dizkiozu.

Bestetik gabe, uda zoriontsua pasa dezazun opa dizugu.



Kalkulatu ondorengo funtzioen deribatuak, aipatzen diren abzisa puntuetan eta definizioa aplikatuz.

1) $f(x) = 2x^2 - x$ $x = 1$	baldin
2) $f(x) = 2(x^3 - 1)$ $x = -1$	baldin
3) $y = \frac{-2}{x+1}$ $x = 1$	baldin
4) $f(x) = 1 + \frac{x}{x-1}$ $x = 0$	baldin
5) $g(x) = \frac{3}{x^2}$ $x = 2$	baldin
6) $y = \frac{4+x}{x^2}$ $x = -2$	baldin



Gogora ezazu: f funtzio baten deribatua x_0 puntuan:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Emaitzak
3
6
1/2
-1
-3/4
3/4

Funtzio deribatua:
$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Kalkulatu funtzio hauen deribatuak, definizioa aplikatuz.

Funtzioak
7) $f(x) = -3x + 5$
8) $y = x^2 - 2x$
9) $g(x) = \frac{1}{x}$

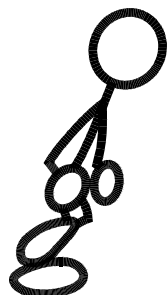
Emaitzak
$f'(x) = -3$
$y' = 2x - 2$
$g'(x) = -1/x^2$

Kalkulatu lehenengo eta bigarren deribatuak honako funtzioetan.

Funtzioak
10) $y = 2 + \frac{x}{x+1}$
11) $y = \frac{x^2}{2-x}$
12) $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$
13) $y = \frac{x}{x^2 - 16}$
14) $y = \frac{4}{x^2 - 1}$

Bi funtzioen arteko zatiketaren deribatua:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$
 eta
$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$$



Emaitzak
$y' = 1/(x+1)^2$
$= -2/(x+1)^3$
$= x(4-x)/(x-2)^2$
$= 8/(2-x)^3$
$= 4x/(x^2+1)^2$
$= 4(1-3x^2)/(x^2+1)^3$
$y' = -(x^2+16)/(x^2-16)^2$
$y'' = 2x(x^2+48)/(x^2-16)^3$
$y' = -8x/(x^2-1)^2$
$y'' = 8(3x^2+1)/(x^2-1)^3$

$$15) f(x) = x - 4 + \frac{10}{x+4}$$

$$y' = 1 - 10/(x+4)^2$$

$$y'' = 20/(x+4)^3$$

Kalkulatu ondorengo funtzioen deribatuak, deribazio logaritmikoa aplikatuz.

Funtzioak

16) $y = \left(\frac{x}{a}\right)^x$
17) $y = (2x)^{\sin x}$
18) $y = \left(\frac{1}{x}\right)^{\cos(2x)}$
19) $y = 4 \sqrt[4]{\frac{(1+2x)^3}{(1-2x)^2}}$

Emaitzak

$\left(\frac{x}{a}\right)^x \left[\ln \frac{x}{a} + 1 \right]$
$(2x)^{\sin x} \left[\cos x \ln 2x + \frac{\sin x}{x} \right]$
$\left(\frac{1}{x}\right)^{\cos 2x} \left[-2 \sin 2x \ln \frac{1}{x} - \frac{\cos 2x}{x} \right]$
$2(1-4x) \sqrt[4]{\frac{(1+2x)^3}{(1-2x)^2}}$

Gogora itzazu:

- ① Bi aldeetan, logaritmo neperarrak hartu eta logaritmoen propietateak aplikatu.
- ② Bi aldeen deribatua egin.
- ③ y' bakandu eta y ordezkatu.



Kalkulatu hurrengo funtzioen deribatuak.

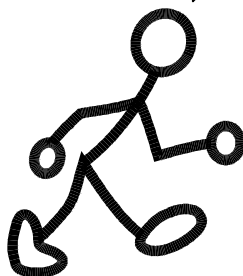
Funtzioak

20) $y = \frac{3x^2}{2}$
21) $y = 3x^4 - \frac{x^2}{2} + 4$
22) $y = \frac{2}{x^2}$
23) $y = \sqrt{1-x^2}$
24) $y = 2\sqrt[3]{x}$
25) $y = \frac{1}{x} \sqrt{x}$
26) $y = (3+x)^8$
27) $y = (2x-1)^6$
28) $y = 3^{x^2+5}$
29) $y = -5^{2x}$
30) $y = \sin x^{-2}$
31) $y = \cos(-4x)$
32) $y = \operatorname{tg} e^x$

Emaitzak

$y' = 3x$
$y' = 12x^3 - x$
$y' = \frac{-4}{x^3}$
$y' = -x / \sqrt{1-x^2}$
$y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}$
$y' = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$
$y' = 8(3+x)^7$
$y' = 12(2x-1)^5$
$y' = 3^{x^2+5} (2x) \ln 3$
$y' = -2 \cdot 5^{2x} \ln 5$
$y' = -\frac{2 \cos x^{-2}}{x^3}$
$y' = 4 \sin(-4x)$
$y' = \frac{e^x}{\cos^2 e^x}$

Birpasatu deribatuen erregelak. Aztertu zer motatako funtzioak dituzun eta aplikatu ikasi duzuna. Kontuz izan



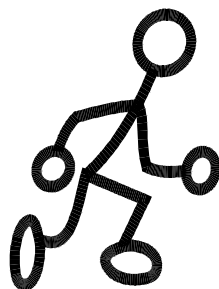
33) $y = \cot g x^2$
34) $y = 2 \sec (-x)$
35) $y = \operatorname{cosec} \frac{x}{2}$
36) $y = \arcsin \sqrt{x}$
37) $y = \arccos (1-x)$
38) $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$
39) $y = \log (3+x)$
40) $y = \ln (x^2 - 2x)$
41) $y = \log_3 (1+x^2)$
42) $y = 3^x \cdot x^3$
43) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$
44) $y = e^{\ln(2x)}$
45) $y = \frac{\cos(x^2 + \pi)}{2}$
46) $y = \frac{\sqrt{x+2}}{x^2}$
47) $y = \frac{x}{x^2 - 1}$
48) $y = \ln(1-x)^2$
49) $y = \ln^2(1-x)$
50) $y = \sin(\operatorname{tg}(2x))$
51) $y = \cos^5 \frac{x}{5}$
52) $y = \cos \frac{x^5}{5}$
53) $y = 5x \cos \frac{x}{5}$
54) $y = \sec(2x)$
55) $y = \operatorname{cosec}(e^{-x})$

$y' = -\frac{2x}{\sin^2 x^2}$
$y' = \frac{2 \sin x}{\cos^2 x}$
$y' = \frac{\cos(x/2)}{2 \sin^2(x/2)}$
$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$
$y' = \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$
$y' = \frac{-1}{x^2+1}$
$y' = \frac{1}{(x+3)\ln 10}$
$y' = \frac{2x-2}{x^2-2x}$
$y' = \frac{2x}{(1+x^2)\ln 3}$
$y' = 3^x (x^3 \ln 3 + 3x^2)$
$y' = \frac{-x}{(x^2-1)^{3/2}}$
$y' = \frac{e^{\ln 2x}}{x}$
$y' = -x \sin(x^2 + \pi)$
$y' = -\frac{3x+8}{2x^3\sqrt{x+2}}$
$y' = -\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$
$y' = \frac{-2}{1-x}$
$y' = \frac{-2\ln(1-x)}{1-x}$
$y' = \frac{2 \cos(\operatorname{tg}(2x))}{\cos^2(2x)}$
$y' = -\cos^4 \frac{x}{5} \sin \frac{x}{5}$
$y' = x^4 \sin \frac{x^5}{5}$
$y' = 5 \cos \frac{x}{5} - x \sin \frac{x}{5}$
$y' = \frac{2 \sin(2x)}{\cos^2(2x)}$
$y' = \frac{e^{-x} \cos e^{-x}}{\sin^2 e^{-x}}$

56) $y = \sqrt[3]{x^3 - 5}$
57) $y = \ln(\operatorname{tg}^2 x)$
58) $y = x \sin x + \cos x$
59) $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$
60) $y = -\frac{3}{\sqrt{3x}}$
61) $y = e^{3x} + 2e^{-x}$
62) $y = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$
63) $y = \ln \frac{1}{1-x^2}$
64) $y = (1-x^3) \cos x$
65) $y = 3^{1/x}$
66) $y = 2(3x^2 - 1)^4$
67) $y = 2 \sin x^2$
68) $y = 2 \sin^2 x$
69) $y = \sin(2x^2)$
70) $y = \sin^2 2x$
71) $y = \sin^2 x^2$
72) $y = x^2 \cdot e^{-x}$
73) $y = \frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{6} + 24$
74) $y = \ln \sqrt[3]{x}$
75) $y = \frac{x^{-5}}{10}$
76) $y = e^{\ln \sin^2 x}$
77) $y = (1-x)\sqrt{1+x}$
78) $y = \frac{1}{\cos^2 x}$
79) $y = \ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$
80) $y = \frac{\sin x - 1}{\cos x - 1}$
81) $y = \cos(\operatorname{cot} g x)$
82) $y = 2x \cdot e^{2x}$

$y' = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3 - 5)^2}}$
$y' = \frac{2(1 + \operatorname{tg}^2 x)}{\operatorname{tg} x}$
$y' = x \cos x$
$y' = 2x - \frac{2}{x^3}$
$y' = \frac{\sqrt{3}}{2x\sqrt{x}}$
$y' = 3e^{3x} - 2e^{-x}$
$y' = \frac{-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}(x-1)^2}$
$y' = \frac{2x}{1-x^2}$
$y' = -3x^2 \cos x - (1-x^3) \sin x$
$y' = -\frac{3^{1/x} \ln 3}{x^2}$
$y' = 48x(3x^2 - 1)^3$
$y' = 4x \cos x^2$
$y' = 4 \sin x \cos x$
$y' = 4x \cos 2x^2$
$y' = 4 \sin 2x \cos 2x$
$y' = 4x \sin x^2 \cos x^2$
$y' = e^{-x}(2x - x^2)$
$y' = x^3 - x$
$y' = \frac{1}{3x}$
$y' = -\frac{1}{2x^6}$
$y' = 2e^{\ln \sin^2 x} \operatorname{cot} g x$
$y' = -\frac{3x+1}{2\sqrt{x+1}}$
$y' = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}$
$y' = -\frac{2}{x}$
$y' = \frac{1 - \cos x - \sin x}{(\cos x - 1)^2}$
$y' = \frac{\sin(\operatorname{cot} g x)}{\sin^2 x}$
$y' = e^{2x}(4x + 2)$

Zure buruarengan gero eta konfiantza gehiago izan behar duzu eta deribatuen taula kontsultatu gabe ariketak egiten hasi behar duzu.



83) $y = \sqrt{4 + 2^x}$
84) $y = 2 - x - \frac{1}{2x^3}$
85) $y = 2 \sin^2 \frac{x}{2} + 2 \cos^2 \frac{x}{2}$
86) $y = \ln \sin x^3$
87) $y = (1 - \sin x) \operatorname{tg} x$
88) $y = 4^x \cdot 6^x$
89) $y = \ln \frac{e}{1+x}$
90) $y = \left(\frac{e}{x}\right)^{x^2}$
91) $y = \sqrt{\frac{6}{x}}$
92) $y = -(x+2)(x-2)(4-x)$
93) $y = (1-x)e^{-x}$
94) $y = \ln \frac{\sin x}{\cos x} + e^{2x}$
95) $y = \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}$
96) $y = \frac{\ln x}{x^2}$
97) $y = x^2 \ln x + x \ln x^2$
98) $y = a \sin (bx)$
99) $y = \log_2 4^x$
100) $y = \cos^2 (2x+1)^3$
101) $y = 4x^3 - x + \frac{1}{e^x}$
102) $y = x - \frac{k}{x}$
103) $y = x^3 \sin \frac{x}{3}$
104) $y = (\sin (2x))^{\cos x}$
105) $y = \ln \frac{x+1}{1-x}$
106) $y = \frac{x^2 + 3}{x^2 - 1}$
107) $y = \sec 3^x$

$y' = \frac{2^{x-1} \ln 2}{\sqrt{2^x + 4}}$
$y' = \frac{3}{2x^4} - 1$
$y' = 0$
$y' = 3x^2 \operatorname{cot} g x^3$
$y' = \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x} - \sin x$
$y' = 24^x \ln 24$
$y' = \frac{-1}{x+1}$
$y' = \left(\frac{e}{x}\right)^{x^2} (-2x \ln x - x)$
$y' = -\frac{\sqrt{6x}}{2x^2}$
$y' = 3x^2 - 8x - 4$
$y' = e^{-x}(x-2)$
$y' = 2e^{2x} + \frac{1}{\sin x \cos x}$
$y' = \frac{\operatorname{tg} x/2}{\cos^2 x/2}$
$y' = \frac{1 - 2 \ln x}{x^3}$
$y' = (2x+2) \ln x + x + 2$
$y' = ab \cos (bx)$
$y' = 2$
$y' = -12(2x+1)^2 \cos (2x+1)^3 \sin (2x+1)^3$
$y' = +12x^2 - 1 - \frac{1}{e^x}$
$y' = 1 + \frac{k}{x^2}$
$y' = 3x^2 \sin \frac{x}{3} + \frac{x^3}{3} \cos \frac{x}{3}$
$y' = (\sin 2x)^{\cos x} \cdot \left[\frac{\cos 2x}{\sin x} - \sin x \ln (\sin 2x) \right]$
$y' = \frac{2}{1-x^2}$
$y' = -8x/(x^2 - 1)^2$
$y' = \sec 3^x \operatorname{tg} 3^x \cdot 3^x \cdot \ln 3$

Ziur nago gero eta hobeto egiten dituzula.



108) $y = \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^2}$
109) $y = \sqrt{e^{x^2} \cdot \operatorname{tg} x}$

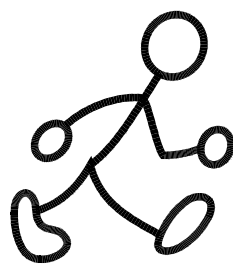
$y' = \frac{x^3 + x - 2}{x^2}$
$y' = \sqrt{e^{x^2} \operatorname{tg} x} \left(x + \frac{2}{\sin x \cos x} \right)$

Kalkulatu deribatuak hartzen duen balioa aipatzen den abzisa puntuan.

110) $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ x = 3	baldin
111) $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ x = 0	baldin
112) $y = (\sin x + \cos x)^4$ x = 0	baldin
113) $y = e^{\sin(2x)}$ x = $\pi/4$	baldin
114) $y = \ln x^x$ x = e	baldin
115) $y = \sin\left(\frac{\pi\sqrt{x}}{3}\right)$ x = 1	baldin

Kalkulatu funtzioaren deribatu eta gero x-en balioa ordezkatu

Emaitzak
$y'(3) = \sqrt{10}/10$
$y'(0) = 1$
$y'(0) = 4$
$y'(\pi/4) = 0$
$y'(e) = 2$
$y'(1) = \pi/12$

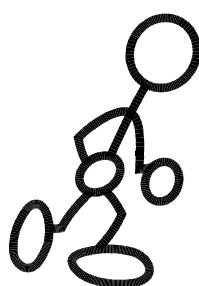


Aztertu hurrengo funtzioen gorakortasuna eta beherakortasuna, baita ahurtasuna eta ganbeltasuna ere.

Funtzioak
116) $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$
117) $y = \frac{x^2 + 1}{x}$
118) $y = \frac{x}{(x-1)^2}$
119) $y = \frac{x^2}{1-x}$
120) $y = \frac{x^3 + 1}{x}$
121) $y = \frac{x^2 - 1}{x^2}$

Gogora ezazu:
Gorakortasun - beherakortasuna → lehenengo deribatuaren zeinua aztertu.
Ahurtasun-ganbeltasuna → bigarren deribatuaren

Emaitzak.
116) Zuzenaren puntuak
→ $x = -2$ y $x = 1$
→ $x = -1/2$
→ $x = -1$ y $x = 1$, $x = 0$
→ Inoiz ez, $x = 0$
→ $x = -1$, $x = 1$
→ $x = -2$, $x = 1$
117) $y = 0 \rightarrow x = 2$ y $x = 0$, $x = 1$
$y'' = 0 \rightarrow$ Inoiz ez, $x = 1$
$y' = 0 \rightarrow x = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}$, $x = 0$
$y'' = 0 \rightarrow x = -1$, $x = 0$
$y' = 0 \rightarrow$ Inoiz ez, $x = 0$
$y'' = 0 \rightarrow$ Inoiz ez, $x = 0$





Gehiago landu nahi badu, planteatutako
ariketaren bat errepika dezakezu.
Enuntziatuak idatzi eta aurrera!