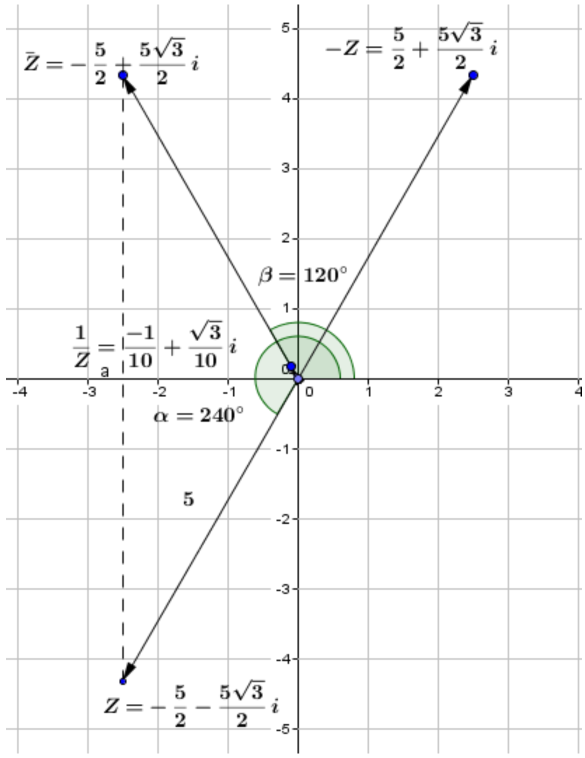
I.E.S. TIERRA ESTELLA MATEMÁTICAS 1º BACH "A-B"

Complejos, Vectores y Recta I 26/01/2016 NOTA

Nombre:

1.-El complejo Z viene representado en el plano adjunto. Se te pide:



a) Expresa dicho complejo en forma polar y binómica

Polar : $Z = 5_{240}$

Binómica : $Z = 5 \cdot (Cos\ 240 + i \cdot Sen\ 240) =$

$= 5 \cdot (-Cos\ 60 - i \cdot Sen\ 60) = 5 \cdot \left(\frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$

$= \frac{-5}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2}i$

b) Determina la expresión polar de los complejos ***opuesto*** e **inverso** del complejo Z. Represéntalos gráficamente.

Opuesto de Z : $-Z = 5_{60}$

Inverso de Z : $\frac{1}{Z} = \frac{1}{5_{240}} = \frac{1}{5}_{-240} = \frac{1}{5}_{120} =$

$= \frac{1}{5} \cdot (Cos\ 120 + i \cdot Sen\ 120) = \frac{1}{5} \cdot (-Cos\ 60 + i \cdot Sen\ 60) =$

$= \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{-1}{10} + \frac{\sqrt{3}}{10}i$

c) Si el complejo Z, resulta ser una de las soluciones de una ecuación de 2º grado con coeficientes reales, determina la expresión binómica de la 2ª solución y represéntala gráficamente. Finalmente obtén dicha ecuación de 2º grado.

La 2ª solución será la conjugada de la 1ª, es decir:

$$Z = z_1 = 5_{240} = -\frac{5}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2}i \rightarrow z_2 = \overline{z_1} = -\frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}i.$$

La solución la obtendremos:

$$\left[z - \left(-\frac{5}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2} \cdot i\right)\right] \cdot \left[z - \left(-\frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2} \cdot i\right)\right] = 0 \rightarrow \left[\left(z + \frac{5}{2}\right) + \frac{5\sqrt{3}}{2} \cdot i\right] \cdot \left[\left(z + \frac{5}{2}\right) - \frac{5\sqrt{3}}{2} \cdot i\right] = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(z + \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5\sqrt{3}}{2} \cdot i\right)^2 = 0 \rightarrow z^2 + 5z + \frac{25}{4} - \frac{75}{4} \cdot i^2 = 0 \rightarrow z^2 + 5z + \frac{25}{4} + \frac{75}{4} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow z^2 + 5z + 25 = 0$$

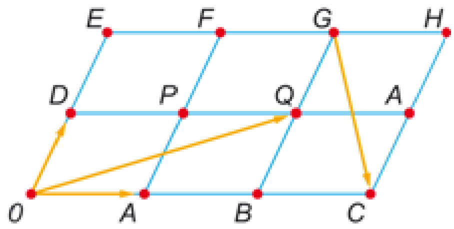
d) Si dicha ecuación fuera $z^2 + 5z + 25 = 0$. Determina sus soluciones en el campo de los números complejos.

$$z^2 + 5 \cdot z + 25 = 0 \rightarrow z = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 100}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{-75}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{75} \cdot \sqrt{-1}}{2} = \frac{-5 \pm 5\sqrt{3} \cdot i}{2}$$

2.-

a) En la figura adjunta, considera los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OD}$. Se te pide:

a_1) Ambos vectores forman una base en el plano. Razona la afirmación que se ha hecho.



Es cierta porque ambos vectores pertenecen a rectas con direcciones distintas.

a_2) Indica las coordenadas que tendrán los vectores $\overrightarrow{OQ}$ y $\overrightarrow{GC}$ en la base $B\{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD}\}$

$$\overrightarrow{OQ} = 2 \cdot \overrightarrow{OA} + 1 \cdot \overrightarrow{OD} = (2, 1)$$

$$\overrightarrow{GC} = 1 \cdot \overrightarrow{OA} - 2 \cdot \overrightarrow{OD} = (1, -2)$$

b) Dados los vectores $\vec{a}(2, 1)$ y $\vec{b}(1, -4)$ se te pide:

b_1) Expresa el vector $\vec{p}(-4, -11)$ como combinación lineal de ellos.

$$(-4, -11) = m \cdot (2, 1) + n \cdot (1, -4) \rightarrow \begin{cases} -4 = 2m + n \\ -11 = m - 4n \xrightarrow{\cdot(-2)} 22 = -2m + 8n \end{cases} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{Sumando} 18 = 9n \rightarrow n = 2$$

$$\xrightarrow{n=2} -4 = 2m + 2 \rightarrow -6 = 2m \rightarrow m = -3$$

$$\xrightarrow{Solución} \vec{p}(-4, -11) = -3 \cdot \vec{a}(2, 1) + 2 \cdot \vec{b}(1, -4)$$

b_2) ¿Qué representan los valores hallados en el apartado anterior?

Los valores -3 y +2 son las componentes del vector $\vec{p}$ en la base $B\{\vec{a}, \vec{b}\}$, es decir:

$\vec{p} = (-3, 2)$ en la base $B\{\vec{a}(2, 1), \vec{b}(1, -4)\}$

3.-

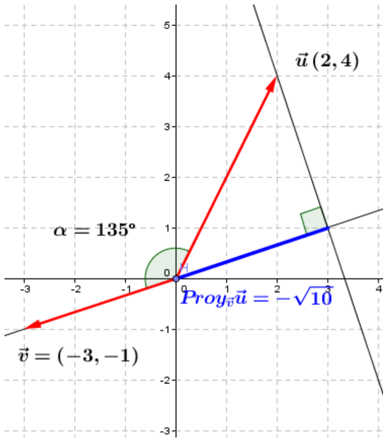
a) Define el producto escalar de 2 vectores, traduce a expresión matemática dicha definición y posteriormente relaciona el producto escalar con las proyecciones de cada uno de los vectores sobre el otro.

Se define el producto escalar de 2 vectores como el valor (número) que se obtiene al multiplicar sus módulos y el coseno del ángulo que forman.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot Cos\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} Proy_{\vec a}\,\vec b = |\vec b|\cdot Cos\left(\vec a,\vec b\right) \\ \\ Proy_{\vec b}\,\vec a = |\vec a|\cdot Cos\left(\vec a,\vec b\right)\end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \vec a\cdot\vec b = |\vec a|\cdot Proy_{\vec a}\,\vec b \\ \\ \vec a\cdot\vec b = |\vec b|\cdot Proy_{\vec b}\,\vec a\end{array}\right.$$

b) Dados los vectores $\vec u$ y $\vec v$ de la figura adjunta. Se te pide



b_1) Determina las coordenadas de dichos vectores en la base ortonormal correspondiente y calcula el valor de su producto escalar.

$$\left.\begin{array}{l}\vec u(2,\ 4) \\ \\ \vec v(-3,\ -1)\end{array}\right\} \rightarrow \vec u(2,\ 4)\cdot\vec v(-3,\ -1) =$$

$$= 2\cdot(-3) + 4\cdot(-1) = -6 - 4 = -10$$

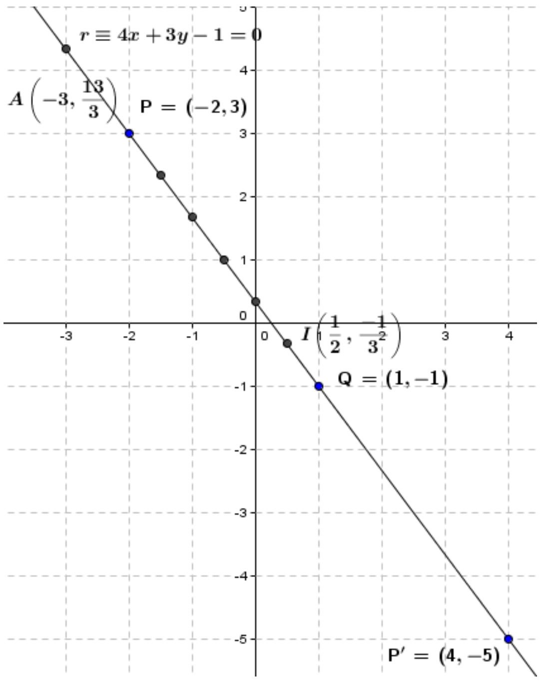
b_2) Determina el ángulo que forman ambos vectores.

$$Cos\ \alpha = \frac{\vec u\cdot\vec v}{|\vec u|\cdot|\vec v|} = \frac{-10}{\sqrt{2^2+4^2}\cdot\sqrt{(-3)^2\cdot(-1)^2}} = \frac{-10}{\sqrt{20}\cdot\sqrt{10}} = \frac{-1}{\sqrt 2} \rightarrow \alpha = 135°$$

b_3) Obtén, gráficamente y numéricamente, la proyección del vector $\vec u$ sobre el vector $\vec v$.

$$Proy_{\vec v}\vec u = |\vec u|\cdot Cos\ \alpha = \sqrt{20}\cdot\left(\frac{-1}{\sqrt 2}\right) = -\sqrt{10}$$

4.-Una recta la determinan los puntos $P(-2,\ 3)$ y $Q(1,\ -1)$. Se te pide:



a) Represente dichos puntos en el plano cartesiano, traza la recta. Determina un vector director de dicha recta y calcula su pendiente.

$$\vec V_r = \overrightarrow{PQ} = (1+2,\ -1-3) = (3,\ -4)$$

$$m_r = \frac{-4}{3} < 0 \rightarrow Decrece$$

b) Expresa la recta de todas las formas que conozcas y dibújala en el plano cartesiano adjunto.

$$Vectorial:\ (x,\ y) = (-2,\ 3) + t\cdot(3,\ -4)$$

$$Paramétrica:\ \left\{\begin{array}{l} x = -2 + 3\cdot t \xrightarrow{\ *\ } \\ \\ y = 3 - 4\cdot t \xrightarrow{\ **\ } \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l}\xrightarrow{*} t = \dfrac{x+2}{3} \\ \xrightarrow{**} t = \dfrac{y-3}{-4}\end{array}\right\} \rightarrow \text{Continua}: \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-3}{-4} \xrightarrow{***}$$

$$\xrightarrow{***} -4x - 8 = 3y - 9 \rightarrow \text{General(Implícita)}: 4x + 3y - 1 = 0 \xrightarrow{****}$$

$$\xrightarrow{****} \begin{cases} \text{Explícita}: y = \dfrac{-4}{3}x + \dfrac{1}{3} \rightarrow \begin{cases} m = \dfrac{-4}{3} \\ n = \dfrac{1}{3} \end{cases} \\ \text{Reducida}: \dfrac{x}{\frac{1}{4}} + \dfrac{y}{\frac{1}{3}} = 1 \end{cases}$$

$$\text{Punto Pendiente}: y = 3 - \frac{4}{3} \cdot (x+2)$$

$$\text{Pasa por dos puntos}: \frac{x+2}{1+2} = \frac{y-3}{-1-4}$$

c) Halla el punto simétrico del punto P respecto al punto Q, deberás hacerlo algebraicamente y comprobarlo gráficamente.

El punto Q será el punto medio de PP´ , si $P'(a, b)$ tendremos:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{-2+a}{2} = 1 \rightarrow -2 + a = 2 \rightarrow a = 4 \\ \\ \dfrac{3+b}{2} = -1 \rightarrow 3 + b = -2 \rightarrow b = -5\end{array}\right\} \rightarrow P'(4, -5)$$

d) Considera el segmento $\overline{PQ}$. Localiza las coordenadas del punto más cercano al punto Q que resulta de dividir dicho segmento $\overline{PQ}$ en seis partes iguales.

Llamemos a dicho punto $I(a, b)$. Se deberá cumplir: tendremos: $\overrightarrow{QP} = 6 \cdot \overrightarrow{QI}$

$$(-3, 4) = 6 \cdot (a-1, b+1) \rightarrow \begin{cases} -3 = 6a - 6 \rightarrow 3 = 6a \rightarrow a = \dfrac{1}{2} \\ \\ 4 = 6b + 6 \rightarrow -2 = 6b \rightarrow b = \dfrac{-1}{3} \end{cases} \rightarrow I\left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{3}\right)$$

e) Si $A(-3, k)$. Calcula el valor de k para que el punto pertenezca a la recta.

Las coordenadas del punto deberán verificar la ecuación de la recta. Si utilizamos la forma general tendremos:

$$4x + 3y - 1 = 0 \rightarrow 4 \cdot (-3) + 3 \cdot k - 1 = 0 \rightarrow -12 + 3k - 1 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 3k = 13 \rightarrow k = \frac{13}{3}$$