I.E.S. TIERRA ESTELLA	MATEMÁTICAS 1º BACH A	
Global 2ª Evaluación	01/03/2016	NOTA

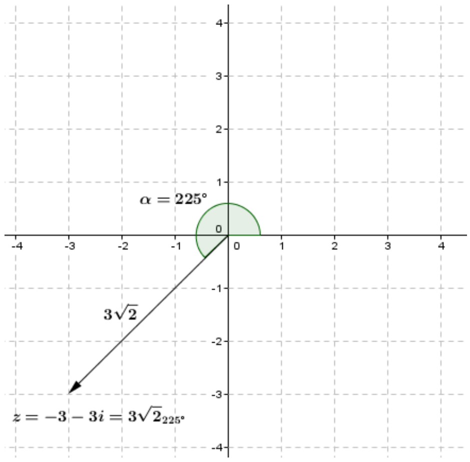
Nombre:

1.- Dado el complejo $z = -3 - 3i$. Se te pide:

a) Expresa dicho complejo en forma polar y represéntalo en el plano complejo adjunto.

$$z = -3 - 3i \rightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^3} = 3\sqrt{2} \\ \\ Tan\ \alpha = \dfrac{-3}{-3} = 1 \rightarrow \alpha = 45 \xrightarrow{NO} \alpha = 225 \end{cases}$$

$$z = 3\sqrt{2}_{225^\circ}$$



b) Calcula el complejo opuesto ($-z$) y el conjugado ($\bar{z}$) y determina el valor de $\dfrac{\bar{z}}{(-z)^2}$, exprésalo en forma polar y binómica,

$$z = -3 - 3i \rightarrow \begin{cases} -z = 3 + 3i = 3\sqrt{2}_{45} \\ \\ \bar{z} = -3 + 3i = 3\sqrt{2}_{135} \end{cases} \rightarrow \frac{\bar{z}}{(-z)^2} = \frac{3\sqrt{2}_{135}}{\left(3\sqrt{2}_{45}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}_{135}}{18_{90}} = \frac{\sqrt{2}}{6}_{45} =$$

$$z = \frac{\sqrt{2}}{6} \cdot (Cos\ 45 + i \cdot Sen\ 45) = \frac{\sqrt{2}}{6} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i\right) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} i$$

c) Si el complejo propuesto (z) es una de las soluciones correspondientes a una ecuación de 2º grado de coeficientes reales determina dicha ecuación.

La otra solución será la conjugada por lo tanto la ecuación será:

$$[z - (-3 - 3i)] \cdot [z - (-3 + 3i)] = 0 \rightarrow [(z + 3) + 3i] \cdot [(z + 3) - 3i] = 0 \rightarrow (z + 3)^2 - (3i)^2 = 0 \rightarrow$$

$$z^2 + 6z + 9 - 9i^2 = 0 \rightarrow z^2 + 6z + 9 + 9 = 0 \rightarrow z^2 + 6z + 18 = 0$$

d) Si la ecuación fuera $z^2 + 6z + 18 = 0$. Determina sus soluciones en el campo de los números complejos.

$$z^2 + 6z + 18 = 0 \rightarrow z = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 72}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36} \cdot \sqrt{-1}}{2} = \frac{-6 \pm 6i}{2} =$$

$$= \begin{cases} z_1 = -3 - 3i \\ \\ z_1 = -3 + 3i \end{cases}$$

2.- La ecuación de una cónica viene dada por la expresión: $9x^2 - 16y^2 + 36x + 96y - 252 = 0$. Se te pide:

a) Expresa dicha cónica en forma reducida indicando los pasos para su obtención.

$$9x^2 - 16y^2 + 36x + 96y - 252 = 0 \rightarrow 9 \cdot (x^2 + 4y + \_\_\_\_) - 16 \cdot (y^2 - 6y + \_\_\_\_) = 252 \rightarrow$$

$$\rightarrow 9 \cdot (x^2 + 4x + 2^2) - 16 \cdot (y^2 - 6y + 3^2) = 252 + 9 \cdot 2^2 - 16 \cdot 3^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow 9 \cdot (x+2)^2 - 16 \cdot (y-3)^2 = 144 \rightarrow \frac{(x+2)^2}{16} - \frac{(y-3)^2}{9} = 1$$

b) Si la cónica tuviera por ecuación: $\frac{(x+2)^2}{16} - \frac{(y-3)^2}{9} = 1$, identifica y define dicha.

Se trata de una hipérbola de eje horizontal, que la definimos como:

Dados dos puntos fijos, llamados focos (F y F') y un valor k (Cte de la hipérbola) la hipérbola como el lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ que cumplen que el módulo de la diferencia de las distancias de los puntos a los focos es igual a la constante de la hipérbola k. Es decir:

$$P(x, y) / |d(P, F) - d(P, F')| = k = 2a$$

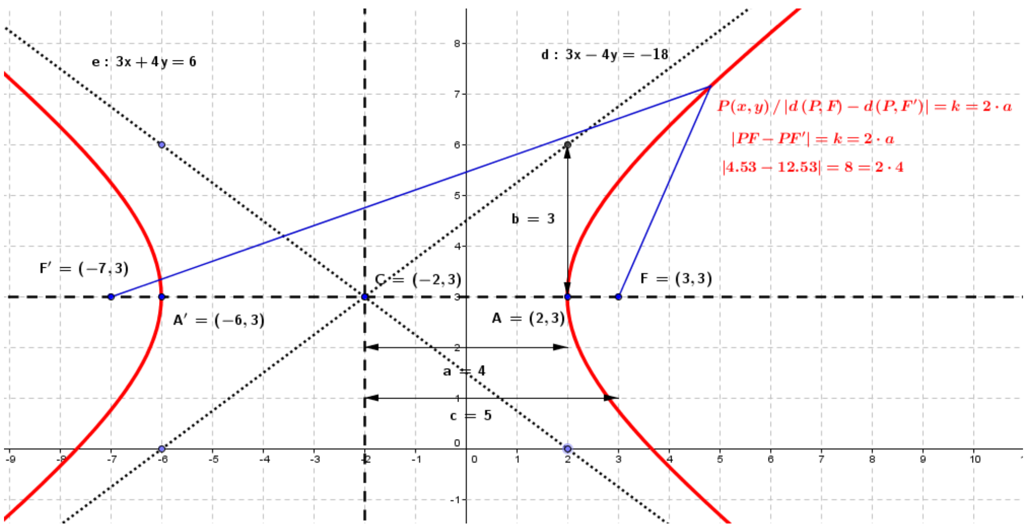
c) Determina sus elementos y realiza un esbozo de la misma.

$C(-2, 3)$

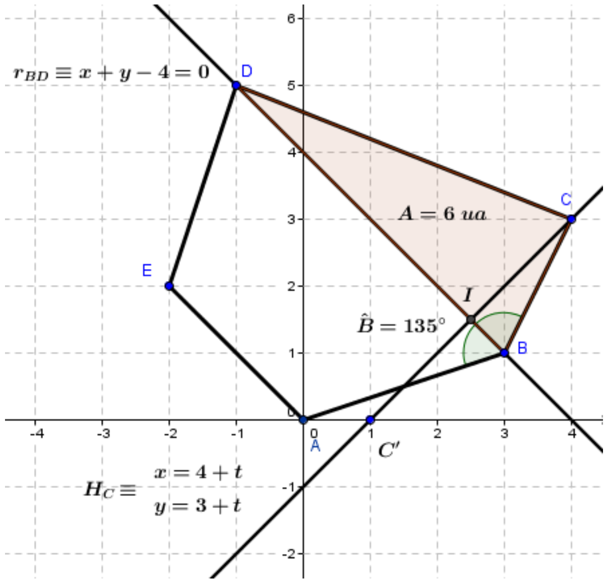
$$\left.\begin{array}{l} a = \sqrt{16} = 4 \rightarrow k = 2 \cdot 4 = 8 \\ b = \sqrt{9} = 3 \end{array}\right\} \rightarrow c = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \rightarrow exc = \frac{c}{a} = \frac{5}{4} = 1{,}25 > 1$$

$$Vértices: \begin{cases} A(-2+4, 3) = (2, 3) \\ A'(-2-4, 3) = (-6, 3) \end{cases} \qquad Fo\ cos: \begin{cases} F(-2+5, 3) = (3, 3) \\ F'(-2-5, 3) = (-7, 3) \end{cases}$$

$$Asíntotas: \begin{cases} y = 3 + \frac{3}{4}(x+2) \rightarrow 3X - 4y + 18 = 0 \\ y = 3 - \frac{3}{4}(x+2) \rightarrow 3x + 4y - 6 = 0 \end{cases}$$



3.- En el pentágono ABCD de la figura adjunta (la gráfica solo ha de servir de comprobación lo que se pide se deberá realizar analíticamente), se te pide:



a) Determina el valor del ángulo correspondiente al vértice B del pentágono.

$$\left.\begin{array}{l} A(0,\ 0) \\ B(3,\ 1) \\ C(4,\ 3) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \overrightarrow{BA}(-3,\ -1) \\ \overrightarrow{BC}(1,\ 2) \end{array} \rightarrow Cos\ \hat{B} = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BC}\right|} =$$

$$= \frac{-3 \cdot 1 + (-1) \cdot 2}{\sqrt{(-3)^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{-5}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{5}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \hat{B} = 135°$$

b) Expresa el vector $\overrightarrow{CD}$ como combinación lineal de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$. ¿Qué significado tienen los valores obtenidos en dicha combinación?.

$$\left.\begin{array}{l} A(0,\ 0) \\ B(3,\ 1) \\ C(4,\ 3) \\ D(-1,\ 5) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \overrightarrow{AB}(3,\ 1) \\ \overrightarrow{BC}(1,\ 2) \\ \overrightarrow{CD}(-5,\ 2) \end{array} \rightarrow \overrightarrow{CD}(-5,\ 2) = a \cdot \overrightarrow{AB}(3,\ 1) + b \cdot \overrightarrow{BC}(1,\ 2) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} -5 = 3a + b \rightarrow b = -5 - 3a \rightarrow b = -5 - 3 \cdot \left(\frac{-12}{5}\right) = \frac{-25 + 36}{5} = \frac{11}{5} \\ 2 = a + 2b \rightarrow 2 = a - 10 - 6a \rightarrow 5a = -12 \rightarrow a = \frac{-12}{5} \end{array}\right.$$

Son las coordenadas que tendrá el vector $\overrightarrow{CD}$ en la base formada por los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$, es decir:

$$\overrightarrow{CD}\left(\frac{-12}{5},\ \frac{11}{5}\right) \text{ en la } Base\left(\overrightarrow{AB}\ y\ \overrightarrow{BC}\right)$$

c) Determina la ecuación general de la recta que pasa por los puntos B y D, r_{BD}

$$\left.\begin{array}{l} B(3,\ 1) \\ D(-1,\ 5) \end{array}\right\} \rightarrow \frac{x-3}{-1-3} = \frac{y-1}{5-1} \rightarrow \frac{x-3}{-4} = \frac{y-1}{4} \rightarrow x - 3 = -y + 1 \rightarrow r_{BD} \equiv x + y - 4 = 0$$

d) En el triángulo BCD , determina la ecuación de la altura, en forma paramétrica, trazada desde el vértice C, H_c .

$$\left.\begin{array}{l} C(4,\ 3) \\ \\ \overrightarrow{V_{H_c}} = (A, B)_{BD} = (1,\ 1) \end{array}\right\} \rightarrow H_c \equiv \begin{cases} x = 4 + t \\ \\ y = 3 + t \end{cases}$$

e) Determina el punto (I) de intersección de las rectas $r_{BD} \equiv x + y - 4 = 0$ y la altura trazada desde el vértice C, $H_c \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 3 + t \end{cases}$ y calcula las coordenadas del punto simétrico del punto C respecto a la recta que determinan los puntos B y D.

Hallamos en primer lugar el punto de intersección I de r_{BD} H_c

$$\left.\begin{array}{l} r_{BD} \equiv x + y - 4 = 0 \\ H_c \equiv \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 3 + t \end{cases} \end{array}\right\} \rightarrow 4 + t + 3 + t - 4 = 0 \rightarrow 2t = -3 \rightarrow t = \frac{-3}{2} \rightarrow \begin{array}{l} x = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \\ y = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \end{array} \rightarrow I\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

El punto I es el punto medio de CC'. Así:

$$\left.\begin{array}{l} C(4,\ 3) \\ I\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right) \\ C'(x,\ y) \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} \frac{5}{2} = \frac{4 + x}{2} \rightarrow x = 1 \\ \\ \frac{3}{2} = \frac{3 + y}{2} \rightarrow y = 0 \end{array} \rightarrow C'(1,\ 0)$$

f) Calcula el área del triángulo BCD

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{\left|\overrightarrow{BD}\right| \cdot d(C, r_{BD})}{2} = \frac{4\sqrt{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}}}{2} = 6\ ua$$

$$\begin{cases} B(3, 1) \\ D(-1,\ 5) \end{cases} \rightarrow \overrightarrow{BD} = (-4,\ 4) \rightarrow \left|\overrightarrow{BD}\right| = \sqrt{(-4)^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} C(4,\ 3) \\ r_{BD} \equiv x + y - 4 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow d(C, r_{BD}) = \frac{|A \cdot a + B \cdot b + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|1 \cdot 4 + 1 \cdot 3 - 4|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

g) Demuestra que la figura ABDE es un Trapecio Isósceles.

Un trapecio Isósceles es un cuadrilátero que tiene 2 lados paralelos y los no paralelos iguales.

$$\overrightarrow{AE} \,//\, \overrightarrow{BD} \rightarrow \begin{array}{l} \overrightarrow{BD}(-4,\ 4) \\ \\ \overrightarrow{AE}(-2,\ 2) \end{array} \rightarrow \frac{-4}{-2} = \frac{4}{2} \rightarrow CIERTO \rightarrow AE \,//\, BD$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{ED}(1,\ 3) \rightarrow |ED| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10} \\ \\ \overrightarrow{AB}(3,\ 1) \rightarrow |ED| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10} \end{array}\right\} \rightarrow ED = AB$$

. Demostrado queda.