I.E.S. TIERRA ESTELLA	MATEMÁTICAS 1º BACH "A-B"	
Recuperación 2ª Evaluación	17/03/2016	NOTA

Nombre:

NOTA: Debes indicar, en cada paso, lo que haces y el porqué.

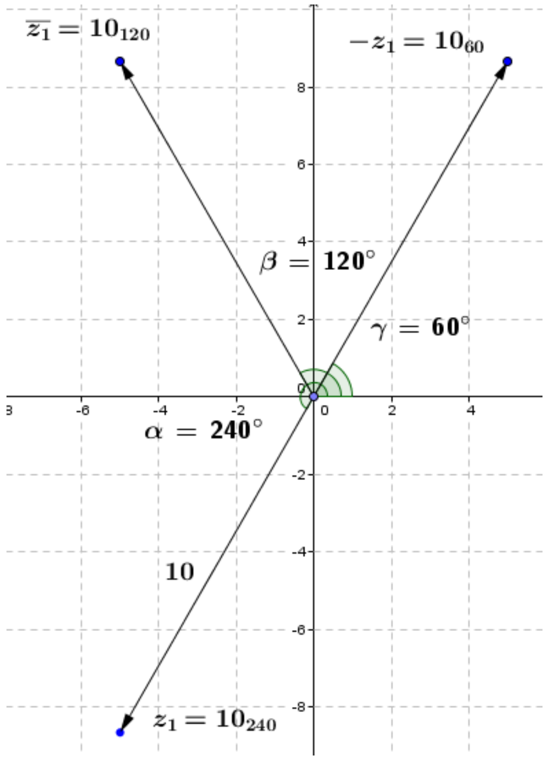
1.- Dado el complejo z_1 de la figura adjunta. Se te pide:

a) Expresa dicho complejo en forma polar y binómica.

$$z = 10_{240} = 10 \cdot (Cos\ 240 + i \cdot Sen\ 240) =$$

$$= 10 \cdot (-Cos\ 60 - i \cdot Sen\ 60) =$$

$$= 10 \cdot \left(-\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -5 - 5\sqrt{3}i$$



b) Calcula el complejo opuesto ($-z$) y el conjugado ($\overline{z}$) en forma polar y represéntalo en el plano complejo adjunto. Finalmente determina el valor de $\frac{-z}{(\overline{z})^2}$, expresa el complejo resultante en forma polar y binómica.

$$\left. \begin{array}{l} -z = 10_{60} \\ \overline{z} = 10_{120} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{-z}{(\overline{z})^2} = \frac{10_{60}}{(10_{120})^2} = \frac{10_{60}}{100_{240}} = \frac{1}{10_{-180}} = \frac{1}{10_{180}} =$$

$$= \frac{1}{10} \cdot (Cos\ 180 + i \cdot Sen\ 180) = \frac{1}{10}(-1 + i \cdot 0) = \frac{-1}{10}$$

c) Si el complejo propuesto (z_1) es una de las soluciones correspondientes a una ecuación de 2º grado de coeficientes reales determina dicha ecuación.

$$[z - (-5 - 5\sqrt{3}i)] \cdot [z - (-5 + 5\sqrt{3}i)] = 0 \rightarrow [(z+5) + 5\sqrt{3}i] \cdot [(z+5) - 5\sqrt{3}i] = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow (z+5)^2 - (5\sqrt{3}i)^2 = 0 \rightarrow x^2 + 10z + 25 - 75i^2 = 0 \rightarrow z^2 + 10z + 25 + 75 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow z^2 + 10z + 100 = 0$$

d) Si la ecuación fuera $z^2 + 10z + 100 = 0$. Determina sus soluciones en el campo de los números complejos.

$$z^2 + 10z + 100 = 0 \rightarrow z = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 400}}{2} = \frac{-10 \pm \sqrt{-300}}{2} = \frac{-10 \pm \sqrt{300} \cdot \sqrt{-1}}{2} =$$

$$= \frac{-10 \pm 10\sqrt{3}i}{2} = -5 \pm 5\sqrt{3}i$$

2.- La ecuación de una cónica viene dada por la expresión: $25x^2 + 9y^2 + 150x - 36y + 36 = 0$. Se te pide:

a) Expresa dicha cónica en forma reducida indicando los pasos para su obtención. *0,75p*

$$25x + 9y + 150x\ 36y\ 36 = 0 \rightarrow 25\cdot(x + 6x + \_\_\_\_)^2 + 9\cdot(y - 4y + \_\_\_\_)^2 = -36 \rightarrow$$

$$\rightarrow 25\cdot(x^2 + 6x + 3^2) + 9\cdot(y^2 - 4y + 2^2) = -36 + 25\cdot 3^2 + 9\cdot 2^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow 25\cdot(x+3)^2 + 9\cdot(y-2)^2 = 225 \rightarrow \frac{(x+3)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{25} = 1$$

b) Si la cónica tuviera por ecuación: $\frac{(x+3)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{25} = 1$, identifica y define dicha.

Se trata de una ELIPSE de eje vertical, que la definimos como:

Dados dos puntos fijos, llamados focos (F y F') y un valor k (Cte de la elipse) definimos la elipse como el lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ que cumplen que la suma de las distancias de dichos puntos a los focos es igual a la constante de la hipérbola k. Es decir:

$$P(x, y) / d(P, F) + d(P, F') = k = 2a$$

c) Determina sus elementos y realiza un esbozo de la misma.

$$\frac{(x+3)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{25} = 1 \begin{cases} a^2 = 25 \rightarrow a = 5 \\ b^2 = 9 \rightarrow b = 3 \end{cases} \rightarrow$$

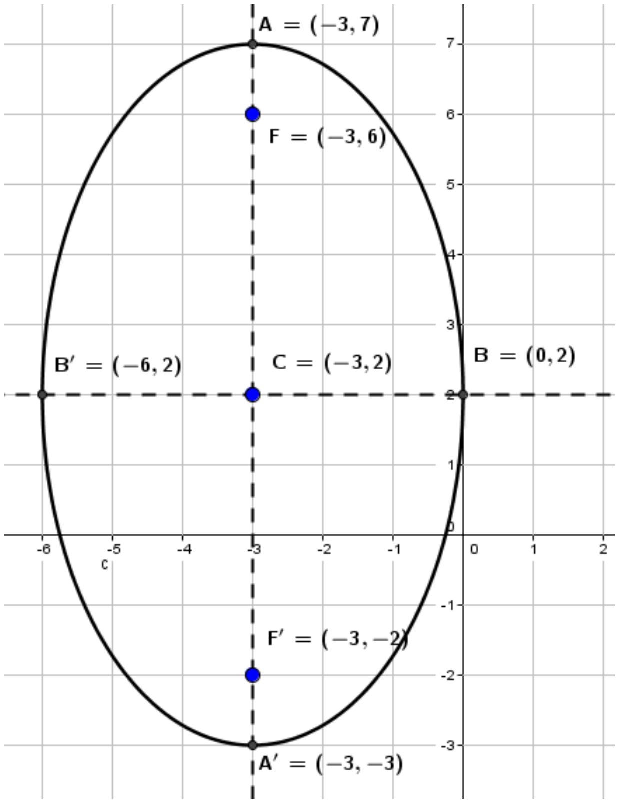
$$\rightarrow c = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$$

$$Centro \rightarrow C(-3, 2)$$

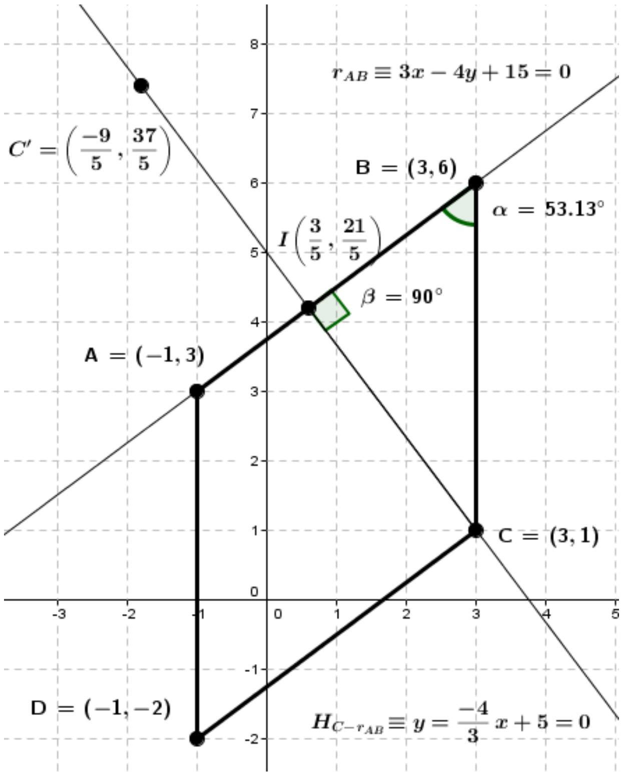
$$Vértices \rightarrow \begin{cases} A(-3, 2+5) = (-3, 7) \\ A'(-3, 2-5) = (-3, -3) \\ B(-3+3, 2) = (0, 2) \\ B(-3-3, 2) = (-6, 2) \end{cases}$$

$$Fo\ cos \rightarrow \begin{cases} F(-3, 2+4) = (-3, 6) \\ F'(-3, 2-4) = (-3, -2) \end{cases}$$

$$Ejes \rightarrow \begin{cases} Eje\ Pr\ incipal: x = -3 \\ Eje\ Secundario: y = 2 \end{cases}$$



3.- De un rombo ABCD se conoce: $A(-1,\ 3)$, $B(3,\ 6)$ y $C(x,\ 1)$. Se te pide, de forma analítica (la gráfica te puede servir de validación de resultados):



a) Determina el valor de la abscisa del punto C.

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right| \rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (4,\ 3) \\ \overrightarrow{BC} = (x-3,\ -5) \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (-5)^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow 25 = x^2 - 6x + 9 + 25 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \rightarrow (x-3)^2 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x - 3 = 0 \rightarrow x = 3 \rightarrow C(3,\ 1)$$

b) Si $C(3,\ 1)$, Determina las coordenadas del punto $D(a,\ b)$ que determina con los vértices A, B y C el rombo ABCD.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (4,\ 3) \\ \overrightarrow{DC} = (3-a,\ 1-b) \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 4 = 3 - a \rightarrow a = -1 \\ 3 = 1 - b \rightarrow b = -2 \end{cases} \rightarrow D(-1,\ -2)$$

NOTA: Por si no lo hubieras calculado el vértice D es $D(-1,\ -2)$, lo necesitarás en los apartados siguientes.

c) Determina el ángulo del rombo correspondiente al vértice B.

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{BA} &= (-4,\ -3) \\ \overrightarrow{BC} &= (0, -5) \end{aligned}\right\} \rightarrow \cos \hat{B} = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BC}\right|} = \frac{-4 \cdot 0 + (-3) \cdot (-5)}{\sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{0^2 + (-5)^2}} = \frac{15}{5 \cdot 5} = \frac{3}{5} \rightarrow \hat{B} = 53'13^{o}$$

d) Determina la ecuación, en forma general, de la recta que determina los puntos A y B.

$$\left.\begin{aligned} A(-1,\ 3) \\ B(3,\ 6) \end{aligned}\right\} \rightarrow \overrightarrow{AB}(4,\ 3) \rightarrow m = \frac{3}{4} \xrightarrow{P.Pendiente} y = 6 + \frac{3}{4}(x-3) \rightarrow r_{AB} \equiv 3x - 4y + 15 = 0$$

e) Determina la distancia del vértice C al lado AB del rombo.

$$d(C,\ r_{AB}) = \frac{|3 \cdot (-1) - 4 \cdot (-2) + 15|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{20}{5} = 4\ ul.$$

f) Utiliza el valor anterior para calcular el área del Rombo (el rombo es un paralelogramo)..

$$Área = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot d\left(C,\ r_{AB}\right) = 5 \cdot 4 = 20\ ul.^2$$

g) Obtén la ecuación de la altura, en forma explícita, trazada del punto C al lado AB.

$$H_{C_{r_{AB}}} \to \begin{cases} \perp\ r_{AB} \to \vec{V}(3,\ -4) \to m = \dfrac{-4}{3} \\ C(3,\ 1) \end{cases} \to y = 1 - \frac{4}{3} \cdot (x - 3) \to y = \frac{-4}{3}x + 5$$

h) Determina las coordenadas del punto simétrico de C respecto a la recta que determinan los puntos A y B

Calculamos el punto de intersección de r_{AB} y $H_{C_{r_{AB}}}$, es decir:

$$\left.\begin{array}{l} 3x - 4y + 15 = 0 \\ y = \dfrac{-4}{3}x + 5 \end{array}\right\} \to 3x - 4 \cdot \left(-\frac{4}{3}x + 5\right) + 15 = 0 \to 9x + 16x - 60 + 45 = 0 \to$$

$$\left.\begin{array}{l} \to 25x = 15 \to x = \dfrac{15}{25} \to x = \dfrac{3}{5} \\ \xrightarrow{x = \frac{3}{5}} y = \dfrac{-4}{3} \cdot \dfrac{3}{5} + 5 = \dfrac{21}{5} \end{array}\right\} \to I\left(\frac{3}{5},\ \frac{21}{5}\right)$$

El punto I es el punto medio de CC', es decir:

$$\left.\begin{array}{l} C(3,\ 1) \\ I\left(\dfrac{3}{5},\ \dfrac{21}{5}\right) \\ C'(p,\ q) \end{array}\right\} \to \begin{array}{l} \dfrac{3}{5} = \dfrac{3 + p}{2} \to p = \dfrac{6}{5} - 3 = \dfrac{-9}{5} \\ \dfrac{21}{5} = \dfrac{1 + q}{2} \to p = \dfrac{42}{5} - 1 = \dfrac{37}{5} \end{array} \to C'\left(\frac{-9}{5},\ \frac{37}{5}\right)$$