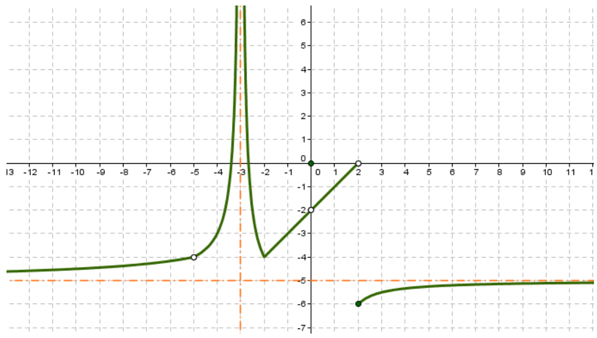
I.E.S. TIERRA ESTELLA MATEMÁTICAS 1º BACH "A-B"

Análisis I **27/04/2016** **NOTA**

Nombre:

1.- La gráfica adjunta corresponde a la función $y = f(x)$. Determina:



a) Su dominio y recorrido.

$D = \Re - \{-5, -3\}$

$R = [-6, 5) \cup (-5, \infty)$

b) Los siguientes límites:

b1) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -5$ b2) $\lim\limits_{x \to -5} f(x) = -4$ b3) $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = +\infty$

b4) $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = +\infty$ b5) $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = -4$ b5) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -2$

b6) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -6 \end{cases} \to \nexists \lim\limits_{x \to 2} f(x)$ b7) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -5$

c) Puntos de discontinuidad y tipos en cada uno de ellos.

$x = -5 \to$ *Discontinua Evitable Punto Hueco*

$x = -3 \to$ *Discontinua Inevitable Salto Infinito*

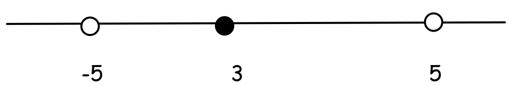
$x = 0 \to$ *Discontinua Evitable Punto Desplazado*

$x = 2 \to$ *Discontinua Inevitable Salto Finito*

2.- Dada La función $y = \left| \dfrac{x+3}{x^2 - 25} \right|$. Determina la función a trozos que le corresponde.

Puntos críticos (los que anulan el NUM o DEN):

$$\to \begin{cases} x + 3 = 0 \to x = -3 \to Re\ lleno \\ \\ x^2 - 25 = 0 \to x = \pm\sqrt{25} \to x = \pm 5 \to Hue\ cos \end{cases}$$



$$\left.\begin{array}{l} (-\infty, -5) \xrightarrow{-10} \dfrac{-}{+} = - \to y = \dfrac{-x-3}{x^2-25} \\ (-5, -3) \xrightarrow{-4} \dfrac{-}{-} = + \to y = \dfrac{x+3}{x^2-25} \\ (-3, 5) \xrightarrow{0} \dfrac{+}{-} = - \to y = \dfrac{-x-3}{x^2-25} \\ (5, \infty) \xrightarrow{0} \dfrac{+}{+} = + \to y = \dfrac{x+3}{x^2-25} \end{array}\right\} \to y = \begin{cases} \dfrac{-x-3}{x^2-25} & si\ x < -5 \\ \dfrac{x+3}{x^2-25} & si\ -5 < x \le -3 \\ \dfrac{-x-3}{x^2-25} & si\ -3 < x < 5 \\ \dfrac{x+3}{x^2-25} & si\ x > 5 \end{cases}$$

3.- Dada la función: $y = \dfrac{7-2x}{4x-3}$. Se Te pide:

a) Determina su función Inverso-Recíproca: y^{-1}

$$y = \frac{7-2x}{4x-3} \rightarrow y^{-1} = \frac{3x+7}{4x+2}$$

$$y \leftrightarrow x$$

$$x = \frac{7-2y}{4y-3} \rightarrow 4xy - 3x = 7 - 2y \rightarrow 4xy + 2y = 3x + 7 \rightarrow y(4x+2) = 3x + 7 \rightarrow$$

$$\rightarrow y = \frac{3x+7}{4x+2}$$

b) ¿Cuánto vale $y^{-1} \circ y(x)$?. Razónalo y Compruébalo.

$$y^{-1} \circ y(x) = x \textit{ Por Definición}$$

$$y^{-1} \circ y(x) = y^{-1}\left(\tfrac{7-2x}{4x-3}\right) = \frac{3 \cdot \left(\frac{7-2x}{4x-3}\right) + 7}{4 \cdot \left(\frac{7-2x}{4x-3}\right) + 2} = \frac{\frac{21 - 6x + 28x - 21}{4x-3}}{\frac{28 - 8x + 8x - 6}{4x-3}} = \frac{22x}{22} = x$$

c) Calcula el valor de $y^{-1} \circ y(-1)$ de dos formas, directamente y determinando previamente el valor $y(-1)$.

$$y^{-1} \circ y(-1) \rightarrow \begin{cases} 1^a \textit{ Forma}: \begin{cases} y(-1) = \dfrac{7 - 2(-1)}{4(-1) - 3} = \dfrac{9}{-7} \\ y^{-1}\left(\dfrac{-9}{7}\right) = \dfrac{3 \cdot \frac{-9}{7} + 7}{4 \cdot \frac{-9}{7} + 2} = \dfrac{\frac{22}{7}}{\frac{-22}{7}} = -1 \end{cases} \\ 2^a \textit{ Forma}: y^{-1} \circ y(-1) = -1 \textit{ por definición} \end{cases}$$

4.- Determina el límite de las siguientes funciones e interpreta gráficamente el resultado obtenido en cada uno de ellos.

a)

$$\lim_{x \to 2} \frac{4 - x^2}{\sqrt{x+2} - 2} = \lim_{x \to 2} \left[-1 \cdot (2+x) \cdot \left(\sqrt{x+2} + 2\right)\right] = -16$$

$$RG \downarrow 1 \qquad\qquad RG \downarrow 2$$

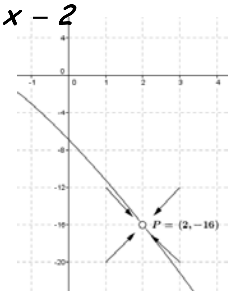
$$(1) \xrightarrow{x=2} \frac{4 - 2^2}{\sqrt{2+2} - 2} = \frac{4-4}{2-2} = \frac{0}{0}$$

$$\frac{(2-x)\cdot(2+x)}{\sqrt{x+2} - 2} \cdot \frac{\sqrt{x+2} + 2}{\sqrt{x+2} + 2} = \frac{(2-x)\cdot(2+x)\cdot\left(\sqrt{x+2} + 2\right)}{x + 2 - 4} = \frac{(2-x)\cdot(2+x)\cdot\left(\sqrt{x+2} + 2\right)}{x - 2} =$$

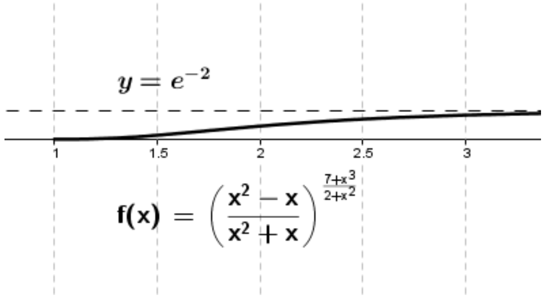
$$= -1 \cdot (2+x) \cdot \left(\sqrt{x+2} + 2\right)$$

$$(2) \xrightarrow{x=2} -1 \cdot (2+2) \cdot \left(\sqrt{2+2} + 2\right) = -4 \cdot (2+2) = -16$$

Punto Hueco en $P(2, -16)$



b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-x}{x^2+x}\right)^{\frac{7+x^3}{2+x^2}}$



$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-x}{x^2+x}\right)^{\frac{7+x^3}{2+x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{7+x^3}{2+x^2}\left(\frac{x^2-x}{x^2+x}-1\right)\right]} = e^{-2}$$

$RG \downarrow$

$$\xrightarrow{x\to\infty}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\frac{\infty}{\infty}} = \left(\frac{x^2}{x^2}\right)^{\frac{x^3}{x^2}} = (1)^x = 1^\infty \to IND\ e$$

$$\xrightarrow{\infty}\frac{7+x^3}{2+x^2}\cdot\left(\frac{x^2-x}{x^2+x}-1\right) = \frac{7+x^3}{2+x^2}\cdot\left(\frac{x^2-x-x^2-x}{x^2+x}\right) = \frac{(7+x^3)\cdot(-2x)}{(2+x^2)\cdot(x^2+x)} =$$

$$= \frac{-2x^4}{x^4} = -2$$

Asíntota Horizontal de ecuación: $y = e^{-2}$

5.- Dada la función: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 + Ln\,(1-x) & si \quad x < 0 \\ 5x + a & si \quad 0 \le x < 2 \\ \dfrac{x-3}{x^2-2x-3} & si \quad x \ge 2 \end{cases}$. Se te pide:

a) Determina el dominio de dicha función:

Tramo 1: Función polinómica y logarítmicas: $1 - x > 0 \to x < 1$. El intervalo de definición lo cumple siempre.

Tramo 2: Función polinómica no hay problemas en el dominio.

Tramo3: Función "x" en el denominador se deberá cumplir: $x^2 - 2x - 3 = 0 \to$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \dfrac{2+4}{2} = 3 \ \exists \ al\ \ int\,ervalo \\ \dfrac{2-4}{2} = -1 \ \nexists \ al\ \ int\,ervalo \end{cases}$$

Dominio= $\Re - \{3\}$

b) Determina el valor que deberá tomar $"a"$ para que dicha función sea continua en $x = 0$. ¿Qué tipo de discontinuidad presentará para cualquier otro valor de $"a"$?. Razónalo .

Para que sea continua se deberá cumplir: $f(0) = \lim\limits_{x \to 0} f(x)$

$$f(0) = 5 \cdot 0 + a = a$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \left[x^2 - 1 + Ln(1 - x)\right] = -1 \\ \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (5x + a) = a \end{cases} \rightarrow -1 = a$$

Para $a = -1$ la función será continua en $x = 0$, para cualquier otro valor será discontinua de salto finito porque los límites laterales serán distintos (no infinitos) y no habrá límite.

c) Para $a = -1$, estudia la continuidad de la función resultante, indicando en cada caso el tipo de discontinuidad.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 + Ln\ (1 - x) & si \quad x < 0 \\ \\ 5x - 1 \quad si \quad 0 \le x < 2 \\ \\ \dfrac{x - 3}{(x + 1) \cdot (x - 3)} & si \quad x \ge 2 \end{cases} .$$

Habrá que estudiar la continuidad en $x = 2$ y $x = 0$ (cambio) y $x = 3$ (dominio)

- En 0 ya estudiado y es continua
- Continuidad en $x = 2 \rightarrow f(2) = \lim\limits_{x \to 2} f(x)$

$$\left.\begin{array}{l} f(2) = \dfrac{2 - 3}{(2 + 1) \cdot (2 - 3)} = \dfrac{-1}{-3} = \dfrac{1}{3} \\ \lim\limits_{x \to 2} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} (5x - 1) = 9 \\ \\ \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x - 3}{(x + 1)(x - 3)} = \dfrac{1}{3} \end{cases} \end{array}\right\} \rightarrow \nexists \lim_{x \to 1} f(x) \rightarrow Disc.\_Inevit.\_Salto\_Finito$$

- Continuidad en $x = 3 \rightarrow f(3) = \lim\limits_{x \to 3} f(x)$

$$\left.\begin{array}{l} f(3) = \dfrac{3 - 3}{(3 + 1)(3 - 3)} = \dfrac{0}{0} \rightarrow \nexists f(3) \\ \\ \lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x - 3}{(x + 1)(x - 3)} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1}{x + 1} = \dfrac{1}{4} \\ RG \downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad RG \downarrow \\ \xrightarrow{x=3} \dfrac{0}{0} = IND \qquad\qquad\qquad \xrightarrow{x=3} \dfrac{1}{3 + 1} = \dfrac{1}{4} \end{array}\right\} \rightarrow Disc.Evit.P.Hueco$$