I.E.S. TIERRA ESTELLA MATEMÁTICAS 1º BACH "A"

Global 3ª Ev 08/06/2016 NOTA

Nombre:

1.-

Dada la función: $y = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} & Si\ x < 2 \\ ax^2 + 3 & Si\ x \geq 2 \end{cases}$. Se te pide:

a) Determina el valor de $''a''$ que hace que la función sea continua en $x = 2$, razona la respuesta. Para cualquier valor distinto al obtenido ¿Qué tipo de discontinuidad presentará, razónalo

$$f(x)\ continua\ en\ x = 2 \Leftrightarrow f(2) = \lim_{x \to 2} f(x)$$

$$\left.\begin{array}{l} f(2) = a \cdot 2^2 + 3 = 4a + 3 \\ \lim\limits_{x \to 2} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-}\left(\dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 1}\right) = \dfrac{4 - 8 + 3}{2 - 1} = -1 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \left(ax^2 + 3\right) = 4a + 3 \end{cases} \end{array}\right\} \to$$

$$-1 = 4a + 3 \to -4 = 4a \to a = -1$$

Para $a = -1$, La función propuesta es continua.

Para $a \neq -1$, los límites laterales serían distintos (pero finitos) y por lo tanto no habría límite por lo que la función sería discontinua inevitable de salto finito

b) Si $a = -1$, determina el dominio de la función y estudia su continuidad e indica en cada caso, en que sea discontinua, el tipo de discontinuidad que presenta.

$$y = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} & Si\ x < 2 \to x - 1 \neq 0 \to x \neq 1 \to D = (-\infty, 1) \cup (1, 2) \\ -x^2 + 3 & Si\ x \geq 2 \to Siempre \to D = [2, \infty) \end{cases} \to D = \Re - \{1\}$$

Deberemos probar, únicamente en los valores fuera del dominio, es decir: en $x = 1$.

Continuidad en $x = 1$

$$f(x)\ continua\ en\ x = 1 \Leftrightarrow f(1) = \lim_{x \to 1} f(x)$$

$$f(1) = \frac{1^2 - 4 \cdot 1 + 3}{1 - 1} = \frac{0}{0} = \nexists f(1)$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 3) \cdot (x - 1)}{(x - 1)} = \lim_{x \to 1}(x - 3) = -2$$

Como existe límite y no función la función $f(x)$ en $x = 1$ es ***Discontinua Evitable de Punto Hueco*** $(1, -2)$

2.- Determina el valor de uno de los siguientes límites e indica su significado geométrico:

2a)

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{2x-3}{x-1}\right)^{\frac{x}{2-x}} = e^{\lim_{x\to 2}\left[\frac{x}{2-x}\cdot\left(\frac{2x-3}{x-1}-1\right)\right]} = e^{\lim_{x\to 2}\frac{-x}{x-1}} = e^{\frac{-2}{2-1}} = e^{-2} \to P.Hueco.(2,\ e^{-2})$$

$\downarrow$ RG

$$\left(\frac{2\cdot 2-3}{2-1}\right)^{\frac{2}{2-2}} = (1)^{\infty} \to IND.\ N^{o}\ e$$

$$\frac{x}{2-x}\cdot\left(\frac{2x-3}{x-1}-1\right) = \frac{x}{2-x}\cdot\frac{2x-3-x+1}{x-1} = \frac{x(x-2)}{(x-1)(2-x)} = \frac{-x}{x-1}$$

2b)

$$\lim_{x\to\infty}\left(2x-\sqrt{4x^2+3x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{-3x}{2x+\sqrt{4x^2+3x}} = \frac{-3}{4} \to A.Horizontal.\ y = \frac{-3}{4}$$

$$\downarrow RG \quad \infty-\infty \to \left(2x-\sqrt{4x^2+3x}\right)\cdot\frac{2x+\sqrt{4x^2+3x}}{2x+\sqrt{4x^2+3x}} = \frac{4x^2-4x^2-3x}{2x+\sqrt{4x^2+3x}} = \frac{-3x}{2x+\sqrt{4x^2+3x}}$$

$$\downarrow RG \quad \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{GN=GD} \frac{-3x}{2x+\sqrt{4x^2+3x}} = \frac{-3x}{2x+2x} = \frac{-3x}{4x} = \frac{-3}{4}$$

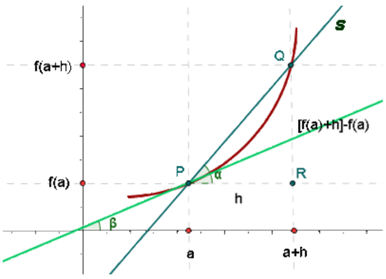
3.-

a) Concepto e interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto.

<u>*DEFINICIÓN:*</u>

La derivada de una función en un punto $A(a,\ f(a))$ es: $f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

<u>SIGNIFICADO GEOMÉTRICO:</u>



La derivada de una función en un punto $A(a, f(a))$ es: la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en dicho punto, esto es la tangente del ángulo que forma dicha recta con la horizontal.

$$f'(a) = m_{recta\_tan gente} = Tag\ \beta$$

b) Dada la función: $y = x^2 - 3x$

b$_1$) Determina su función derivada aplicando la definición.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h\cdot(2x+h-3)}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h-3) = 2x-3$$

$$f(x+h) = (x+h)^2 - 3\cdot(x+h) = x^2+2xh+h^2-3x-3h$$
$$f(x+h)-f(x) = x^2+2xh+h^2-3x-3h-x^2+3x = 2xh+h^2-3h = h\cdot(2x+h-3)$$

b2) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica en el punto de abscisa $x = 3$.

$$\begin{cases} A(3, f(3) \\ \\ m = f'(3) \end{cases} \rightarrow y = f(3) + f'(3)(x-3) \rightarrow y = 0 + 3(x-3) \rightarrow y = 3x - 9$$

$$f(3) = 3^2 - 3 \cdot 3 = 0$$
$$f'(3) = 2 \cdot 3 - 3 = 3$$

4.- Aplicando las reglas de derivación determina la función derivada correspondiente a las funciones:

a) (Opera el resultado).

$$y = ArcTan\,\frac{x^2}{3x-4} \rightarrow y' = \frac{\frac{2x \cdot (3x-4) - x^2 \cdot 3}{(3x-4)^2}}{1 + \left(\frac{x^2}{3x-4}\right)^2} = \frac{\frac{6x^2 - 8x - 3x^2}{(3x-4)^2}}{\frac{9x^2 - 24x + 16 + x^4}{(3x-4)^2}} =$$

$$= \frac{3x^2 - 8x}{x^4 + 9x^2 - 24x + 16} = \frac{x \cdot (3x-8)}{x^4 + 9x^2 - 24x + 16}$$

b)

$$y = \left(\frac{x^3}{Cos\,(5x)}\right)^{e^{2x}}$$

$$Ln\, y = e^{2x} \cdot [3 \cdot Ln\, x - Ln\, Cos\,(5x)]$$

$$\frac{y'}{y} = e^{2x} \cdot 2 \cdot [3 \cdot Ln\, x - Ln\, Cos\,(5x)] + e^{2x} \cdot \left[3 \cdot \frac{1}{x} - \frac{-5 \cdot Sen(5x)}{Cos(5x)}\right]$$

$$y' = \left(\frac{x^3}{Cos\,(5x)}\right)^{e^{2x}} \cdot e^{2x} \cdot \left\{2 \cdot [3 \cdot Ln\, x - Ln\, Cos\,(5x)] + \frac{3}{x} + 5 \cdot Tan(5x)\right\}$$

5.- Dada la función: $y = \frac{(x+2)^3}{(x-2)^2} = \frac{x^3 + 6x^2 + 12x + 8}{x^2 - 4x + 4}$ cuyas derivada 1ª y 2ª son, respectivamente: $y' = \frac{(x-10)(x+2)^2}{(x-2)^3}$, $y'' = \frac{96x + 192}{(x-2)^4}$. Se te pide:

a) Determina su dominio y cortes con ejes. 0'25

Dominio: Función con x en el denominador

$(x-2)^2 \neq 0 \rightarrow x - 2 = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow D = R - \{2\}$

Corte ejes

- Ordenadas: $x = 0 \rightarrow y = \frac{(0+2)^3}{(0-2)^2} = \frac{8}{4} = 2 \rightarrow (0, 2)$
- Abscisas: $y = 0 \rightarrow 0 = \frac{(x+2)^3}{(x-2)^2} \rightarrow (x+2)^3 = 0 \rightarrow x + 2 = 0 \rightarrow x = -2 \rightarrow (-2, 0)$

b) Sus asíntotas así como la posición de las mismas respecto a la grafica.

$$y = \frac{(x+2)^3}{(x-2)^2} = \frac{x^3+6x^2+12x+8}{x^2-4x+4}$$

<u>Vertical</u>: Si la hay será en los valores que anulen el denominador, en nuestro caso en $x-2=0 \to x=2$. Además el límite en ese punto debe ser infinito.

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x+2)^3}{(x-2)^2} = \left[\frac{64}{0}\right] = \pm\infty \xrightarrow{Posición} \begin{cases} \lim_{x\to 2^-} \frac{(x+2)^3}{(x-2)^2} = \frac{+}{+} = +\infty \\ \lim_{x\to 1^+} \frac{(x+2)^3}{(x-2)^2} = \frac{+}{+} = +\infty \end{cases} \xrightarrow{A.Vertical} x = 2$$

<u>Horizontal</u>:

$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+6x^2+12x+8}{x^2-4x+4} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \xrightarrow{G-N>G-D} = \pm\infty \to$. No hay, debería haber dado un número finito

<u>Oblicua:</u> Si la hay será de la forma: $y = m \cdot x + n$

Donde:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+6x^2+12x+8}{x^3-4x^2+4x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \xrightarrow{G.Num=G.Den} = \frac{1}{1} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty}[f(x) - m\cdot x] = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+6x^2+12x-8}{x^2-4x+4} - 1\cdot x\right) =$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+6x^2+12x+8-x^3+4x^2-4x}{x^2-4x+4}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{10x^2+8x+8}{x^2-2x+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \xrightarrow{G.Num=G.Den} = \frac{10}{1} = 10$$

La ecuación de la asíntota oblicua será: $y = x + 10$

Estudiemos la posición:

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x) - (m\cdot x + n)] = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3+6x^2+12x+8}{x^2-4x+4} - 1\cdot x - 10\right) =$$

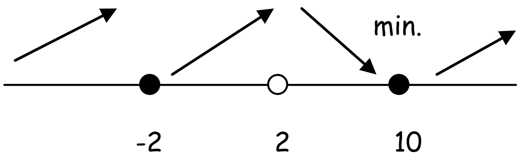
$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3+6x^2+12x+8-x^3+4x^2-4x-10x^2+40x-40}{x^2-4x+4}\right) =$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{48x-32}{x^2-4x+4} \xrightarrow{G.N<G.D} \frac{-}{+}0 = 0^- \to Debajo$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{48x-32}{x^2+4x+4} \xrightarrow{G.N<G.D} \frac{+}{+}0 = 0^+ \to Encima$$

c) Estudia la monotonía y máximo y mínimos relativos.

Habrá que estudiar los signos de la 1ª derivada: $y' = \dfrac{(x-10)(x+2)^2}{(x-2)^3}$



Que se hace 0 en: $(x-10)(x+2)^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 10 \\ x = -2 \end{cases}$

(posibles M-m) y en la recta habrá que poner también el valor que anula el denominador, es decir: $x = 2$.

$(-\infty, -2) \xrightarrow{-10} y' = \dfrac{- \cdot +}{-} = + > 0 \rightarrow Crece$

$(-2, 2) \xrightarrow{0} y' = \dfrac{- \cdot +}{-} = + > 0 \rightarrow Crece$

$(2, 10) \xrightarrow{5} y' = \dfrac{- \cdot +}{+} = - < 0 \rightarrow Decrece$

$(10, \infty) \xrightarrow{100} y' = \dfrac{+ \cdot +}{+} => 0 \rightarrow Crece$

Presenta un ***mínimo en***:

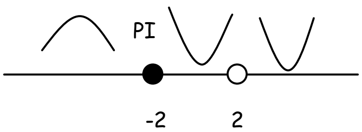
$x = 10 \rightarrow y = \dfrac{(10+2)^3}{(10-2)^2} = \dfrac{12^3}{8^2} = 27 \rightarrow m(10, 27)$

d) Estudia su curvatura localizando los puntos de inflexión si los tuviera.

Habrá que estudiar la 2º Derivada de la función: $y'' = \dfrac{96x + 192}{(x-2)^4}$

Que se hace 0 en: $96x + 192 = 0 \rightarrow x = -2$ que será un posible punto de inflexión

En la recta habrá que poner el valor que anula el denominador, es decir: $x = 1$



$(-\infty, -2) \xrightarrow{-10} y'' = \dfrac{-}{+} = - < 0 \rightarrow Convexa \cap$

$(-2, 2) \xrightarrow{0} y'' = \dfrac{+}{+} = + > 0 \rightarrow Concava \cup$

$(2, \infty) \xrightarrow{10} y'' = \dfrac{+}{+} = + > 0 \rightarrow Concava \cup$

Habrá un punto de inflexión en: $x = -2$

$x = -2 \rightarrow y = \dfrac{(-2+2)^3}{(-2-2)^2} = 0 \rightarrow PI(-2, 0)$

e) Con los datos obtenidos , realiza un esbozo de la gráfica de la función propuesta.