Análisis de algunas estrategias

Página 10

1 **Un motorista sale de su casa a las cinco de la tarde para acudir a una cita. Se da cuenta de que si viaja a 60 km/h llegará un cuarto de hora tarde, pero que si lo hace a 100 km/h llegará un cuarto de hora antes. ¿A qué hora es la cita? ¿A qué distancia está su destino?**

Llamamaos t al tiempo que tarda el motorista en llegar si va a 60 km/h y x a la distancia que hay hasta el lugar de la cita.

A 100 km/h tarda media hora menos en llegar que a 60 km/h. Es decir, tarda $t-0{,}5$. Entonces:

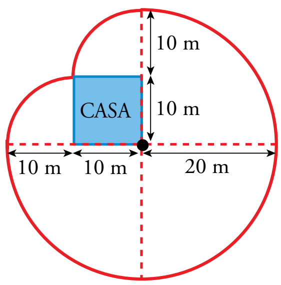
$$\begin{cases} t = \dfrac{x}{60} \\ t - 0{,}5 = \dfrac{x}{100} \ \rightarrow\ t = \dfrac{x}{100} + 0{,}5 \end{cases} \rightarrow\ \frac{x}{60} = \frac{x}{100} + 0{,}5 \ \rightarrow\ 100x = 60x + 3\,000 \ \rightarrow\ x = \frac{3\,000}{40} = 75 \text{ km}$$

$$x = 75 \ \rightarrow\ t = \frac{75}{60} = \frac{5}{4} = 1{,}25 = 1 \text{ h } 15 \text{ min}$$

A 60 km/h llegaría a las seis y cuarto.

La cita era a las seis de la tarde.

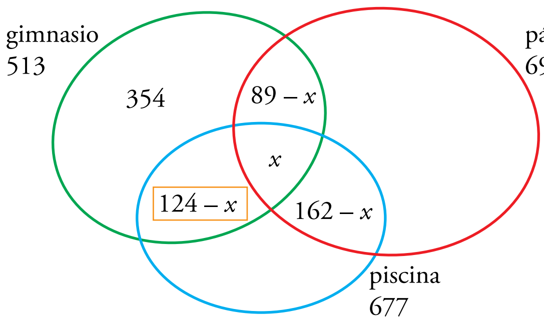
2 **En el segundo problema de arriba, supongamos que la cabra está atada a una casa de planta cuadrada de 10 m de lado y que la cuerda atada a una de las esquinas mide 20 m. Calcula, en este caso, la superficie en la que puede pastar la cabra.**



$$Área = \frac{3}{4}\pi \cdot 20^2 + \frac{2}{4}\pi \cdot 10^2 = 350\pi \approx 1\,100 \text{ m}^2$$

Página 11

3 **En un club deportivo hay 513 socios que utilizan el gimnasio, 696 que juegan al pádel y 677 que van a la piscina. Usan las pistas de pádel y el gimnasio 89 socios; el gimnasio y la piscina, 124, y las pistas de pádel y la piscina, 162. Si hay 354 socios que solo usan el gimnasio, ¿cuántos socios usan todas las instalaciones? ¿Cuántos socios hay en total?**



$$513 = 354 + (89 - x) + (124 - x) + x \ \rightarrow\ 513 = 567 - x \ \rightarrow\ x = 54$$

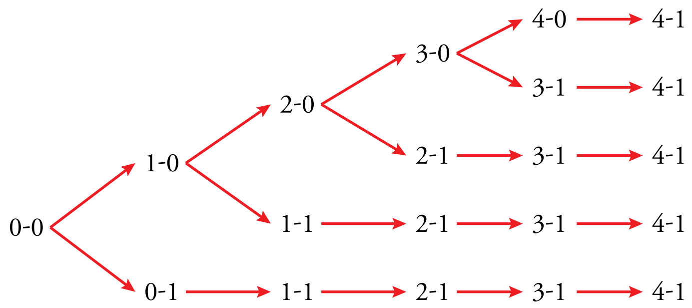
En total hay $513 + 696 + 677 - (89 - x + x + 124 - x + 162 - x) = 1\,619$ socios.

4 **a) En un partido de fútbol, ¿de cuántas formas se puede llegar al resultado 5-0? ¿Y al resultado 4-1? Por tanto, ¿de cuántas formas se puede llegar al 5-1?**

b) Si además de saber que un partido terminó 4-4, sabemos que pasó por 3-1, ¿de cuántas formas pudo evolucionar el resultado?

a) Solo se puede llegar de una forma a 5-0:

1-0 $\rightarrow$ 2-0 $\rightarrow$ 3-0 $\rightarrow$ 4-0 $\rightarrow$ 5-0



Se puede llegar de 5 formas a 4-1.

Se puede llegar de 6 formas a 5-1.

b) El razonamiento es similar al del apartado anterior. A partir de 3-1, se puede llegar de 4 formas distintas a 4-4.

Página 12

5 **Resuelve el problema anterior pero con estos números de magdalenas y bollos suizos en las seis bandejas: 18, 19, 21, 23, 25 y 34.**

18 + 19 + 21 + 23 + 25 + 34 = 140

140 es múltiplo de 3 más 2. Si después de suprimir un sumando el resultado es múltiplo de 3, el sumando suprimido debe ser, también, múltiplo de 3 más 2. La única bandeja que tenía un número de piezas múltiplo de 3 más 2 es la de 23 unidades. Esta es, pues, la que se ha quemado.

140 – 23 = 117

18 + 21 = 39 $\rightarrow$ Son las bandejas de magdalenas.

19 + 25 + 34 = 78 $\rightarrow$ Son las bandejas de bollos suizos.

6 **Ramiro tiene siete botes de canicas con 39, 46, 22, 14, 25, 18 y 12 unidades. Las canicas de seis de ellos son rojas y las canicas del otro son amarillas. Regala todas las bolas rojas a Horacio y a Arturo, dándole a cada uno varios botes completos. Si se sabe que Arturo recibe la cuarta parte de las bolas que ha recibido Horacio, ¿cuántas bolas amarillas hay en el único bote con canicas de este color? ¿Qué botes han recibido Horacio y Arturo?**

Total de canicas:

39 + 46 + 22 + 14 + 25 + 18 + 12 = 176

Si a Arturo le da la cuarta parte de bolas rojas que a Horacio es porque la suma de bolas rojas es múltiplo de 5. Al quitar la bolsa de canicas amarillas tiene que quedar un múltiplo de 5, luego la bolsa de canicas amarillas tiene 46 bolas.

39 + 22 + 14 + 25 + 18 + 12 = 130

$\frac{130}{5}$ = 26 canicas le da a Arturo.

12 + 14 = 26

39 + 22 + 25 + 18 = 104 canicas le da a Horacio.

7 **Se han tomado dos fichas de cartón y se ha escrito un número en cada una de las cuatro caras.**

Tirándolas al aire y sumando los números que quedan a la vista, pueden obtenerse los siguientes resultados: 36, 41, 50, 55.

Observa los siguientes números obtenidos en una de las tiradas y averigua los números que quedan ocultos:

25 **30**

Llamamos a al número que va en la cara opuesta al 25 y b al de la cara opuesta al 30; los resultados posibles serían:

$a + 30$ 36

$b + 25$ 41

$a + b$ 50

$25 + 30 \to 55$

Descartado el 55, que corresponde a 25 + 30, ahora debemos asociar las tres sumas restantes a los números 36, 41 y 50.

Hagamos un cuadro:

$a + 30 = 36$ $b + 25 = 41$	$a + 30 = 36$ $b + 25 = 50$	$a + 30 = 41$ $b + 25 = 36$	$a + 30 = 41$ $b + 25 = 50$	$a + 30 = 50$ $b + 25 = 36$	$a + 30 = 50$ $b + 25 = 41$
$a = 6$ $b = 16$ Imposible Debería ser $a + b = 50$	$a = 6$ $b = 25$ Imposible Debería ser $a + b = 41$	$a = 11$ $b = 11$ Imposible Debería ser $a + b = 50$	$a = 11$ $b = 25$ $a + b = 36$ Primera solución	$a = 20$ $b = 11$ Imposible Debería ser $a + b = 41$	$a = 20$ $b = 16$ $a + b = 36$ Segunda solución

El problema tiene, por tanto, dos soluciones:

$$\left.\begin{array}{l}1.^{\text{a}}\text{ ficha: } 25 \text{ y } 11\\ 2.^{\text{a}}\text{ ficha: } 30 \text{ y } 25\end{array}\right\} \quad \text{o bien:} \quad \left\{\begin{array}{l}1.^{\text{a}}\text{ ficha: } 25 \text{ y } 20\\ 2.^{\text{a}}\text{ ficha: } 30 \text{ y } 16\end{array}\right.$$

Página 13

8 **Un grupo de amigos van a comer a un restaurante chino. Cada dos comparten un plato de arroz; cada tres, uno de salsa, y cada cuatro, uno de carne. Si en total se sirvieron 65 platos, ¿cuántos amigos fueron a comer?**

x = n.º de amigos

Platos de arroz $= \frac{x}{2}$

Platos de salsa $= \frac{x}{3}$

Platos de carne $= \frac{x}{4}$

$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 65 \to x = 60$

Fueron 60 amigos a comer.

9 **En una excursión a la montaña, organizada por un club alpino, cada tres miembros comparten una mochila; cada cuatro, una brújula, y cada seis, un mapa. Si entre mochilas, brújulas y mapas hay 27 objetos, ¿cuántos miembros del club participan en la excursión?**

x = n.º de miembros del club

Mochilas = $\frac{x}{3}$

Brújulas = $\frac{x}{4}$

Mapas = $\frac{x}{6}$

$\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+\frac{x}{6}=27 \rightarrow x=36$

Participan en la excursión 36 miembros.

10 **Un pintor tarda 3 horas más que otro en pintar una misma pared. Se sabe que trabajando juntos hubieran pintado esa pared en 2 horas. Calcula cuánto tardó cada uno en hacer el trabajo en solitario.**

El pintor 1 tarda x horas en pintar la pared $\rightarrow$ En 1 hora pinta: $\frac{1}{x}$

El pintor 2 tarda $x-3$ horas $\rightarrow$ En una hora pinta: $\frac{1}{x-3}$

Entre los dos pintan $\frac{1}{2}$ de la pared en una hora.

Luego:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-3}=\frac{1}{2} \rightarrow x=1;\ x=6$$

Como $x>3 \rightarrow x=6$ horas tarda el pintor 1 en pintar la pared y $6-3=3$ horas tarda el pintor 2 en pintar la pared.

11 **Un grifo tarda en llenar una piscina 3 horas menos que su desagüe en vaciarla. Si se abren ambos a la vez, estando vacía, la piscina tarda 36 horas en llenarse. ¿Cuánto tardará cada uno en cumplir su tarea si el otro permanece cerrado?**

El grifo tarda x horas en llenar la piscina.

En una hora llena: $\frac{1}{x}$

El desagüe en una hora vacía: $\frac{1}{x+3}$

En una hora, los dos abiertos, se llena: $\frac{1}{36}$

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}=\frac{1}{36}$$

$$36\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}\right)=\frac{108}{x(x+3)}=1$$

$$x(x+3)=108 \rightarrow x=9;\ x=-12$$

Como el tiempo no puede ser negativo $\rightarrow x=9$

El grifo llenaría la piscina en 9 horas y el desagüe la vaciaría en 12 horas.

Página 14

12 **El conserje de un hotel cierra y abre las puertas de las habitaciones según el siguiente criterio:**

- **El primer día cierra todas las puertas.**
- **El segundo día abre las pares.**
- **El tercer día cambia las múltiplos de 3 (si una puerta estaba abierta, la cierra; y si estaba cerrada, la abre).**
- **El cuarto día cambia las múltiplos de 4.**
- **Etcétera.**

¿Qué puertas son las que quedarán cerradas al final del proceso?

Ayuda: observa, según el número de la puerta, la cantidad, par o impar, de divisores que tiene. Por ejemplo, la puerta 14 tiene un número par de divisores 1, 2, 7 y 14. Es decir, 1-cerrada, 2-abierta, 7-cerrada, 14-abierta. Sigue probando con otras puertas.

Empezamos haciendo un esquema: C indica puerta cerrada, A indica puerta abierta.

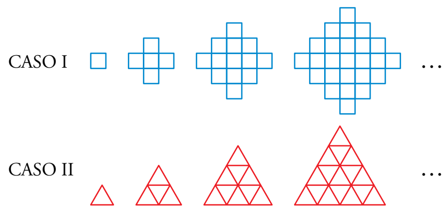
Número de puerta:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…
Primer día:	**C**	C	C	C	C	C	C	C	C	C	…
Segundo día:	C	**A**	C	A	C	A	C	A	C	A	…
Tercer día:	C	A	**A**	A	C	C	C	A	A	A	…
Cuarto día:	C	A	A	**C**	C	C	C	C	A	A	…

Observamos que las puertas que quedan cerradas al final de proceso son la 1, 4, 9, 16, …

Es decir, las que llevan un número que es cuadrado perfecto.

Esto es debido a que son los únicos números que tienen un número impar de divisores y, por tanto, tendrán un número impar de cambios, quedando finalmente cerradas.

13 **Observa cómo se pasa de una figura a la siguiente:**



a) ¿Cuántos cuadraditos contiene la figura que ocupa el lugar 20 en el CASO I?

b) ¿Cuántos triangulitos contiene la figura que ocupa el lugar 20 en el CASO II?

c) ¿Cuántos cuadraditos contiene la figura que ocupa el lugar *n* en el CASO I?

d) ¿Cuántos triangulitos contiene la figura que ocupa el lugar *n* en el CASO II?

a) CASO I:

Número de cuadraditos en las figuras: 1, 5, 13, 25, 41, …

$a_1 = 1,\ a_2 = 1 + 4,\ a_3 = 1 + 4 + 8,\ a_4 = 1 + 4 + 8 + 12, \dots$

$a_1 = 1,\ a_2 = 1 + 4 \cdot 1,\ a_3 = 1 + 4(1 + 2),\ a_4 = 1 + 4(1 + 2 + 3), \dots$

$a_{20} = 1 + 4(1 + 2 + 3 + \dots + 19) = 1 + 4\dfrac{20 \cdot 19}{2} = 761$

b) CASO II:

Número de triangulitos en las figuras 1, 4, 9, 16, …

$a_1 = 1 = 1^2,\ a_2 = 4 = 2^2,\ a_3 = 9 = 3^2,\ a_4 = 16 = 4^2, \dots,\ a_{20} = 20^2 = 400$

c) $a_n = 1 + 4(1 + 2 + 3 + \dots + n - 1)$

El paréntesis es la suma de los $n - 1$ números naturales, que forman una progresión aritmética de diferencia $d = 1$:

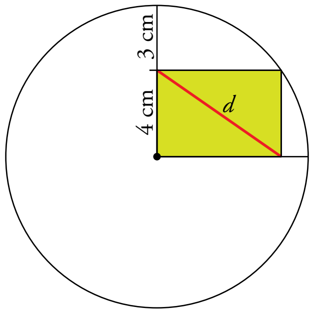
$S_{n-1} = \dfrac{n(n-1)}{2}$

Luego $a_n = 1 + 4\dfrac{n(n-1)}{2} = 1 + 2n(n-1)$

d) Cada térmio es el cuadrado del lugar que ocupa, luego $a_n = n^2$.

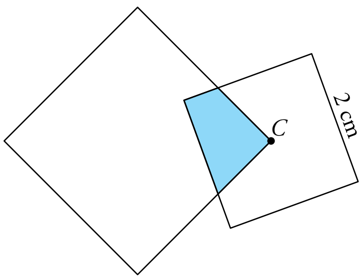
Página 15

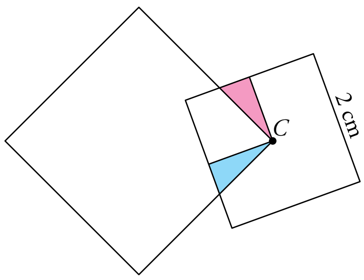
14 Calcula la longitud del segmento *d*.



Las dos diagonales miden lo mismo, y la otra diagonal del rectángulo es el radio de la circunferencia, luego $d = 7$.

15 Sabiendo que el punto *C* es el centro del cuadrado pequeño, ¿qué superficie tiene la zona sombreada?

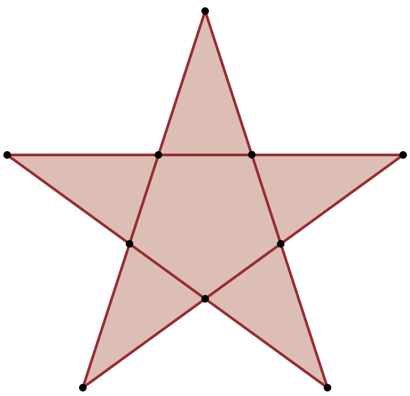




La superficie pedida es igual a la cuarta parte del cuadrado pequeño: $S = 1\ \text{cm}^2$

16 ¿Cómo pueden colocarse diez alumnos de tal manera que formen cinco filas de cuatro alumnos cada una?

Los alumnos deben estar sobre las intersecciones de una estrella de cinco puntas, como muestra el siguiente dibujo:



La demostración matemática

Página 16

1 Siendo la proposición A: "x es múltiplo de 10", ¿para cuál o cuáles de estas proposiciones se cumple $A \Rightarrow B$?

a) B: "x es múltiplo de 2"

b) B: "$x/10$ es un número primo"

c) B: "x^2 es múltiplo de 100"

d) B: "x^2 es múltiplo de 10"

a) $A \Rightarrow B$, pues "si x es múltiplo de 10, entonces x es múltiplo de 2".

b) A no implica B, pues, por ejemplo, 100 es múltiplo de 10 pero $\frac{100}{10} = 10$ no es primo.

c) $A \Rightarrow B$, pues "si x es múltiplo de 10, entonces x^2 es múltiplo de 100".

d) $A \Rightarrow B$, pues "si x es múltiplo de 10, entonces x^2 es múltiplo de 10".

Página 17

2 El número p es un número primo mayor que 3. Demuestra que $p^2 - 1$ es múltiplo de 12.

$p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$

$p - 1$, p, $p + 1$ son tres números consecutivos.

Como p es primo mayor que 3, no es par. Sí lo son, pues, $p - 1$ y $p + 1$.

Por tanto, $(p - 1)(p + 1) = p^2 - 1$ es $\dot{4}$.

En tres números consecutivos, uno de ellos es $\dot{3}$. Como p no lo es, o bien $p - 1$ o bien $p + 1$ lo es. Por tanto, $(p - 1)(p + 1)$ es $\dot{3}$.

$$\left.\begin{array}{l} p^2 - 1 \text{ es } \dot{4} \\ p^2 - 1 \text{ es } \dot{3} \end{array}\right\} \to p^2 - 1 \text{ es } \dot{12}$$

Vamos a ponerlo en forma de proposiciones, dando por sentado que p es un número primo mayor que 3 y, por tanto, natural.

A: "$p - 1$, p, $p + 1$ son números consecutivos"

B: "$p - 1$ y $p + 1$ son ambos pares y uno de ellos es $\dot{3}$"

C: "el producto $(p - 1)(p + 1)$ es $\dot{3}$ y $\dot{4}$"

D: "$p^2 - 1$ es $\dot{12}$"

$A \Rightarrow B \Rightarrow C \Rightarrow D$. Por tanto, $A \Rightarrow D$. Como A es cierta, D es cierta.

3 Demuestra que cada ángulo de un polígono regular de n lados mide $180° - \frac{360°}{n}$.

La suma de los n ángulos de un polígono es $(n - 2) \cdot 180°$.

Si el polígono es regular, cada uno de ellos mide $\frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$. Por tanto:

$$\frac{(n-2)\cdot 180°}{n} = \frac{180°\cdot n - 360°}{n} = 180° - \frac{360°}{n}$$

Página 18

4 **Demuestra que si n^2 es múltiplo de 5, entonces n es múltiplo de 5.**

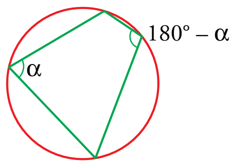
Suponemos que n no es $\dot{5}$. Luego el 5 no aparecerá en su descomposición en factores primos. Por tanto, tampoco aparecerá el 5 en la descomposición de n^2, y no será divisor suyo, en contra de lo supuesto. Hemos llegado a una contradicción, luego n es $\dot{5}$.

5 **Demuestra que $\sqrt{3}$ es irracional.**

La demostración es absolutamente similar a la de $\sqrt{2}$.

6 **Tres de los ángulos de un cuadrilátero miden 30°, 130° y 140°. Demuestra que no se puede inscribir en una circunferencia.**

Ten en cuenta que los ángulos de un cuadrilátero suman 360° y que si un cuadrilátero está inscrito en una circunferencia, sus ángulos opuestos son suplementarios.

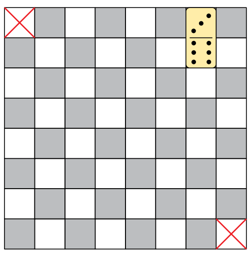


Supongamos que el cuadrilátero descrito sí se pudiera inscribir en una circunferencia. En tal caso, cada dos ángulos opuestos sumarían 180°.

Pero los cuatro ángulos de este cuadrilátero, que miden 30°, 130°, 140° y 60°, no se pueden emparejar de modo que cada dos sumen 180°.

Por tanto, este cuadrilátero no se puede inscribir en una circunferencia.

7 **Tenemos un tablero de ajedrez y muchas fichas de dominó de tamaño exactamente igual a dos de las casillas del tablero. Es claro que con 32 de esas fichas podemos "tapar" las 64 casillas. Sin embargo, si prescindimos de la casilla de una esquina no podemos tapar al resto con las fichas, pues son un número impar de casillas y cada ficha tapa dos.**



Demuestra que si prescindimos de las casillas de dos esquinas opuestas, las restantes 62 casillas no pueden taparse con 31 fichas.

Las dos casillas de las esquinas son blancas. Si las suprimimos quedan 30 blancas y 32 negras.

Cada ficha de dominó tapa una blanca y una negra. Razonemos por reducción al absurdo:

Suponemos que sí se pueden tapar las 62 casillas que quedan con 31 fichas de dominó. Como cada ficha de dominó tapa una blanca y una negra, se taparían 31 blancas y 31 negras en contra de la situación de partida en la que hay 30 blancas y 32 negras. Luego hemos llegado a una contradicción.

Por tanto, no se pueden tapar las 62 casillas restantes con 31 fichas.

Página 19

8 **Demuestra, aplicando el método de inducción, que $n^3 - n$ es múltiplo de 6.**

Para $n = 1 \rightarrow 1^3 - 1 = 0$ es $\dot{6}$.

Suponemos que $n^3 - n$ es $\dot{6}$. Veamos qué pasa para $n + 1$:

$$(n+1)^3 - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 = n^3 - n + 3n^2 + 3n = \underbrace{(n^3 - n)}_{(1)} + \underbrace{3n(n+1)}_{(2)}$$

(1) Es $\dot{6}$ por hipótesis.

(2) Es el producto de 3 por dos números consecutivos por lo que uno es par. Luego $3n(n+1)$ es $\dot{6}$.

Por tanto, $(n+1)^3 - (n+1)$ es $\dot{6}$, que es lo que queríamos demostrar.

9 **Demuestra, aplicando el método de inducción, que:**

$1 + 2 + \ldots + n = n(n + 1)/2$

Para $n = 1 \rightarrow 1 = \dfrac{1 \cdot (1+1)}{2}$ se cumple.

Suponemos que $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Veamos qué pasa para $n + 1$:

$$1 + 2 + \ldots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \left(\frac{n}{2} + 1\right)(n+1) = \frac{n+2}{2}(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2}$$

Por tanto, la propiedad de partida queda demostrada por el método de inducción.

Problemas para practicar

Página 20

1 Un automovilista que conduce a 90 km/h ve un tren que se acerca en sentido contrario por una vía paralela a la carretera por la que circula. El tren está compuesto, entre vagones y máquina, por 18 unidades. Cada unidad tiene una longitud de 15 m. El tren tarda en pasar ante los ojos del automovilista, desde la locomotora a la cola, 6 s. ¿Sabrías, con todos estos datos, calcular la velocidad del tren?

v = velocidad del tren

$6 \text{ s} = \frac{6}{3\,600} \text{ h}$

El tren mide $18 \cdot 15 = 270 \text{ m} = 0{,}27 \text{ km}$

Como los vehículos van en sentidos opuestos, la velocidad relativa de uno respecto del otro es $90 + v$.

Por tanto:

$$0{,}27 = (90 + v) \cdot \frac{6}{3\,600} \rightarrow v = 72$$

Luego la velocidad del tren es de 72 km/h.

2 Un tren avanza a 90 km/h por un tramo recto de vía. Por una carretera paralela, y en la misma dirección, avanza un coche a 120 km/h. ¿Cuál es la longitud del tren sabiendo que el coche tarda 18 s en sobrepasarlo?

x = longitud del tren

Como los vehículos van en el mismo sentido, la velocidad relativa de uno respecto del otro es:

$$120 - 90 = 30 \text{ km/h}$$

Por tanto:

$$x = 30 \cdot \frac{18}{3\,600} = \frac{3}{20} = 0{,}15 \text{ km} = 150 \text{ m}$$

3 Un ciclista sube un puerto a una velocidad de 8 km/h. Y lo baja por la misma vertiente a 24 km/h. ¿Cuál ha sido el promedio de velocidad en todo el recorrido?

x = kilómetros del puerto

t = tiempo de subida

t' = tiempo de bajada

Como el recorrido es el mismo a la ida que a la vuelta, el espacio total es $2x$.

La velocidad media es el espacio total recorrido entre el tiempo total invertido:

$$t = \frac{x}{8}$$

$$t' = \frac{x}{24}$$

$$\bar{v} = \frac{2x}{t + t'} = \frac{2x}{\frac{x}{8} + \frac{x}{24}} = \frac{2x}{\frac{3x + x}{24}} = 12 \text{ km/h}$$

Luego el promedio de velocidad en todo el recorrido es de 12 km/h.

4 Una ambulancia recibe el aviso de un accidente de tráfico y sale del hospital hacia el lugar del suceso a una velocidad de 60 km/h. Si la vuelta al hospital la hizo escoltada por un coche de policía a 100 km/h, ¿cuál fue la velocidad media del recorrido?

x = kilómetros de ida

t = tiempo de ida

t' = tiempo de vuelta

Como el recorrido es el mismo a la ida y a la vuelta, el espacio total es $2x$.

La velocidad media es el espacio total tecorrido entre el tiempo total invertido:

$$t = \frac{x}{60}$$

$$t' = \frac{x}{100}$$

$$\overline{v} = \frac{2x}{t + t'} = \frac{2x}{\frac{x}{60} + \frac{x}{100}} = 75 \text{ km/h}$$

Luego el promedio de velocidad en todo el recorrido es de 75 km/h.

5 Si subo una colina a una velocidad de 4 km/h y pretendo que la velocidad media entre el ascenso y el descenso sea de 7 km/h, ¿a qué velocidad debo descender?

Análogamente al problema 4, si v es la velocidad de descenso y x es el espacio recorrido en el ascenso:

$$\left.\begin{array}{l} \overline{v} = \dfrac{2x}{\frac{x}{4} + \frac{x}{v}} = \dfrac{2x}{\frac{v \cdot x + 4x}{4v}} = \dfrac{2x}{\frac{x(v+4)}{4v}} = \dfrac{8v}{v+4} \\ \overline{v} = 7 \end{array}\right\} \to 8v = 7v + 28 \to v = 28 \text{ km/h}$$

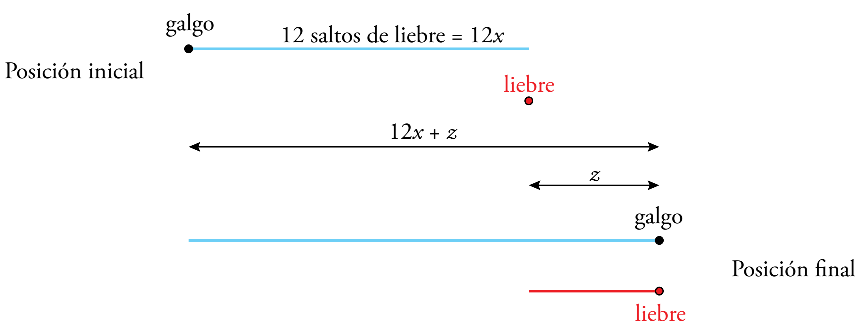
6 Una liebre aventaja en doce de sus saltos al galgo que la persigue. Dos saltos del galgo equivalen, en longitud, a tres de la liebre. El galgo tarda en dar tres saltos lo mismo que la liebre en dar cuatro. ¿Cuántos saltos dará la liebre antes de ser alcanzada?

x = metros que recorre la liebre en un salto

y = metros que recorre el galgo en un salto

t = tiempo que tarda la liebre en dar un salto

t' = tiempo que tarda el galgo en dar un salto



$$3x = 2y \to y = \frac{3}{2}x$$

$$3t' = 4t \to t = \frac{3}{4}t'$$

$$x = v_{\text{liebre}} \cdot t = v_{\text{liebre}} \cdot \frac{3}{4}t'$$

$$v_{\text{galgo}} = \frac{y}{t'} = \frac{\frac{3}{2}x}{t'} = \frac{\frac{3}{2} \cdot v_{\text{liebre}} \cdot \frac{3}{4}t'}{t'} = \frac{9}{8}v_{\text{liebre}}$$

El tiempo que tarda en alcanzar el galgo a la liebre es: $\dfrac{12x + z}{v_{galgo}}$

El tiempo que está la liebre corriendo hasta que el galgo la alcanza es: $\dfrac{z}{v_{liebre}}$

Y los dos tiempos son iguales, luego: $\dfrac{12x + z}{v_{galgo}} = \dfrac{z}{v_{liebre}}$

Sustituyendo:

$$\frac{12x + z}{\frac{9}{8}v_{liebre}} = \frac{z}{v_{liebre}} \rightarrow 12x = \left(\frac{9}{8} - 1\right)z = \frac{1}{8}z \rightarrow z = 12 \cdot 8x = 96x$$

Luego la liebre da 96 saltos.

7 **Ana y su hermana pequeña, Marta, echan una carrera. Marta da 7 zancadas en 6 segundos y Ana, 9 zancadas en 4 segundos. Si Ana sale después de que Marta haya dado 318 zancadas, ¿en cuanto tiempo la alcanza, sabiendo que 3 zancadas de Marta equivalen a 2 zancadas de Ana?**

Este problema es similar al anterior, pero lo vamos a resolver con un método alternativo.

Representamos con los símbolos zM = zancada de Marta y zA = zancada de Ana.

$$v_{Marta} = \frac{7}{6}\ zM/\text{s}$$

$$v_{Ana} = \frac{9}{4}\ zA/\text{s} = \frac{9}{4} \cdot \frac{3}{2}\ zM/\text{s} = \frac{27}{8} zM/\text{s}$$

Como las dos van en el mismo sentido, la velocidad relativa de Ana respecto de Marta es:

$$\frac{27}{8} - \frac{7}{6} = \frac{53}{24}\ zM/\text{s}$$

Como Marta lleva 318 zM de ventaja, el tiempo que tarda Ana en alcanzarla es:

$$\frac{318}{\frac{53}{24}} = 144 \text{ s}$$

8 **Un barco hace un servicio regular entre dos ciudades, A y B, situadas en la misma orilla de un río. Cuando va de A a B, en el sentido de la corriente, tarda 3 horas; y a la vuelta, tarda 4 horas. ¿Cuánto tardará un objeto que flota en ir desde A hasta B?**

x = velocidad del barco sin tener en cuenta la corriente

y = velocidad de la corriente

z = distancia de A a B

Cuando va de A a B, en el sentido de la corriente, la velocidad del barco es $x + y$.

Cuando va de B a A, la velocidad del barco es $x - y$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{I: } \dfrac{z}{x+y} = 3 \rightarrow z = 3(x+y) \\ \text{II: } \dfrac{z}{x-y} = 4 \rightarrow z = 4(x-y) \end{array}\right\} \rightarrow 3(x+y) = 4(x-y) \rightarrow x = 7y$$

t = tiempo que tarda el objeto que flota

$$t = \frac{z}{y}$$

Usando I $\rightarrow t = \dfrac{3x + 3y}{y} = \dfrac{21y + 3y}{y} = 24$ h

Luego un objeto que flota tardará 24 horas en ir desde A hasta B.

9 **Un remero va desde un punto A hasta otro B y vuelve otra vez a A en 10 h. La distancia entre A y B es de 24 km. Halla la velocidad de la corriente del agua sabiendo que rema 2 km aguas arriba en el mismo tiempo que rema 3 km aguas abajo.**

v_{remero} = velocidad del remero

$v_{\text{corriente}}$ = velocidad de la corriente

velocidad aguas abajo = $v_{\text{remero}} + v_{\text{corriente}}$

velocidad aguas arriba = $v_{\text{remero}} - v_{\text{corriente}}$

t = tiempo que tarda aguas abajo

t' = tiempo que tarda aguas arriba

I: $t + t' = 10$

$$\frac{2}{v_{\text{remero}} - v_{\text{corriente}}} = \frac{3}{v_{\text{remero}} + v_{\text{corriente}}} \rightarrow v_{\text{remero}} + v_{\text{corriente}} = \frac{3}{2}(v_{\text{remero}} - v_{\text{corriente}})$$

$$\text{II: } \begin{cases} 24 = t(v_{\text{remero}} + v_{\text{corriente}}) \\ 24 = t'(v_{\text{remero}} - v_{\text{corriente}}) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 24 = \frac{3}{2}t(v_{\text{remero}} - v_{\text{corriente}}) \\ 24 = t'(v_{\text{remero}} - v_{\text{corriente}}) \end{cases} \rightarrow 1 = \frac{3}{2}\,\frac{t}{t'} \rightarrow t' = \frac{3}{2}t$$

Unimos esta ecuación con la que tenemos en I:

$$\begin{cases} t + t' = 10 \\ t' = \frac{3}{2}t \end{cases} \rightarrow t = 4;\ t' = 6$$

Sustituyendo en II:

$$\begin{cases} 24 = 4(v_{\text{remero}} + v_{\text{corriente}}) \\ 24 = 6(v_{\text{remero}} - v_{\text{corriente}}) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 6 = v_{\text{remero}} + v_{\text{corriente}} \\ 4 = v_{\text{remero}} - v_{\text{corriente}} \end{cases} \rightarrow v_{\text{remero}} = 5 \text{ km/h};\ v_{\text{corriente}} = 1 \text{ km/h}$$

10 **Tenemos dos velas. La más estrecha mide 14 centímetros y se consume totalmente en 3 horas y media. La otra, mucho más ancha, tarda 5 horas en consumirse. Si las dejamos arder, al cabo de dos horas tendrán la misma altura. ¿Qué altura tiene ahora la vela más ancha?**

x = altura de la vela ancha

La altura que baja la vela estrecha en dos horas es $\frac{14}{3,5} \cdot 2$.

La altura después de dos horas ardiendo es $14 - \frac{14}{3,5} \cdot 2$.

La altura que baja la vela ancha en dos horas es $\frac{x}{5} \cdot 2$.

La altura después de dos horas ardiendo es $x - \frac{x}{5} \cdot 2$.

$$14 - \frac{14}{3,5} \cdot 2 = x - \frac{x}{5} \cdot 2 \rightarrow x = 10 \text{ cm}$$

La vela ancha mide ahora 10 cm.

11 Tenía dos velas de la misma calidad y grosor, una el doble de larga que la otra. Hace media hora las encendí simultáneamente y ahora una mide un quinto de la altura de la otra. ¿Cuánto tardará aún cada vela en consumirse?

x = longitud de la vela corta

y = longitud de la vela larga

t = tiempo que tarda en consumirse la vela corta

z = longitud de vela que se consume en una hora ardiendo

$t = \frac{x}{z}$

En media hora se consume una longitud igual a $0{,}5z$.

Después de media hora las longitudes de las velas son:

vela corta = $x - 0{,}5z$

vela larga = $y - 0{,}5z$

Representando mediante ecuaciones los datos del problema, tenemos:

$$\begin{cases} y = 2x \\ x - 0{,}5z = \dfrac{y - 0{,}5z}{5} \end{cases} \rightarrow 5x - 2{,}5z = 2x - 0{,}5z \rightarrow 3x = 2z$$

$t = \frac{x}{z} = \frac{2}{3}$

El tiempo que tarda en consumirse la vela corta es $\frac{2}{3}$ de hora (40 minutos), luego tardará 10 minutos más en consumirse.

El tiempo que tarda en consumirse la vela larga es $\frac{4}{3}$ de hora (80 minutos), luego tardará 50 minutos más en cosumirse.

12 Dos velas de la misma altura se encienden simultáneamente. Una se consume en 4 horas y la otra en 10 horas. ¿Cuántas horas deberán arder hasta que la longitud de una de ellas sea la mitad que la longitud de la otra?

Tomamos como unidad la longitud de ambas velas antes de ser encendidas.

- La longitud de la 1.ª vela en t horas es $1 - \frac{1}{4}t$.
- La longitud de la 2.ª vela en t horas es $1 - \frac{1}{10}t$.

¿Para qué valor de t la primera es la mitad de la 2.ª?

$$1 - \frac{1}{4}t = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{10}t\right) \rightarrow t = 2{,}5$$

Han de transcurrir 2 horas y media.

13 Vas a un piso que se encuentra en la sexta planta de una casa sin ascensor. Hay tres interruptores, I, II y III, en la planta baja, uno de los cuales enciende la luz de tu rellano. ¿Cómo averiguas cuál es el interruptor correcto si solo subes una vez a hacer comprobaciones? (Es decir, manipulas los interruptores, subes, observas y deduces, sin ninguna duda, cuál de ellos es el que corresponde a tu planta).

Enciendes el interruptor I. Lo mantienes encendido 5 minutos y lo apagas.

Enciendes el interruptor II, subes y tocas la bombilla si está apagada.

Si la bombilla está encendida, tu interruptor es el II.

Si la bombilla está apagada y caliente, tu interruptor es el I.

Si la bombilla está fría y apagada, tu interruptor es el III.

14 **Se sabe que una vela ilumina durante una hora; y que con las sobras de 10 velas se fabrica una nueva:**

a) ¿Cuántas horas de luz tendremos con 442 velas?

b) ¿Cuántas velas se necesitan para garantizar 1 000 horas de luz?

a) $\frac{442}{10} = 44{,}2$

Tendremos 442 horas con las velas originales más 44 horas de las velas que se fabrican con los restos de las primeras y nos quedan dos restos de vela.

$\frac{44}{10} = 4{,}4$

Más 4 velas más que se fabrican con los restos de las 44 y nos quedan 4 restos de vela, que junto con los otros 2 restos tenemos 6 restos de vela que no nos permiten hacer otra vela.

$442 + 44 + 4 = 490$

Tendremos 490 horas de luz.

b) x = número de velas

$$x + \frac{x}{10} + \frac{x}{100} = 1\,000 \rightarrow x = 900{,}9$$

Necesitamos 901 velas.

15 **Las edades de un padre y de su hijo suman 100. Cuando el padre tenía la edad que hoy tiene el hijo, sus edades sumaban 56. ¿Cuál es la edad de cada uno?**

Representamos las condiciones en una tabla:

	Edad actual	Edad hace $x - y$ años
Padre	x	$x - (x - y) = y$
Hijo	y	$y - (x - y) = 2y - x$
Total	$x + y = 100$	$y + (2y - x) = 56$

Las edades son la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ y + (2y - x) = 56 \end{cases} \rightarrow x = 61;\ y = 39$$

El padre tiene 61 años y el hijo 39 años.

16 **Ramón le dice a su sobrino David: “Mi edad es el triple de la edad que tú tenías cuando yo tenía la edad que tú tienes. Cuando tengas mi edad, la suma de nuestras edades será 70”. ¿Qué edad tiene cada uno en este momento?**

Representamos las condiciones en una tabla:

	Edad actual	Edad hace $x - y$ años	Edad dentro de $x - y$ años
Ramón	x	$x - (x - y) = y$	$x + (x - y) = 2x - y$
David	y	$y - (x - y) = 2y - x$	$y + (x - y) = x$
Total		$x = 3(2y - x)$	$2x - y + x = 70$

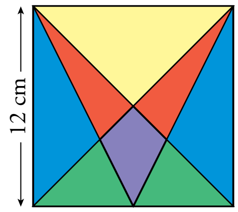
Las edades son la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x = 3\,(2y - x) \\ 2x - y + x = 70 \end{cases} \rightarrow x = 30;\ y = 20$$

Ramón tiene 30 años y David tiene 20 años.

Página 21

17 Calcula el área de las partes del cuadrado ocupadas por cada color.



Área del cuadrado = 144 cm^2

a = zona amarilla

r = zona roja

m = zona morada

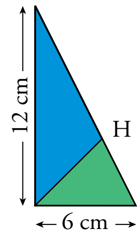
v = zona verde

b = zona azul

La zona amarilla es la cuarta parte del cuadrado: $a = \dfrac{144}{4} = 36$ cm^2

$r + m + a = \dfrac{12 \cdot 12}{2} = 72 \;\to\; r + m = 36$

$v + m = 36 \;\to\; r = v$



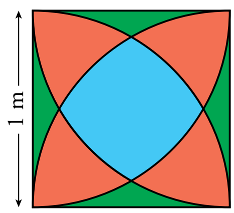
El triángulo azul tiene el doble de área que el triángulo verde en la figura siguiente, porque el punto H está en la diagonal del cuadrado, luego la distancia de H a los dos lados es la misma, y la base del triángulo azul es el doble que la base del triángulo verde.

Tenemos las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} a = 36 \\ r = v \\ r + m = 36 \\ b + r = 36 \cdot 2 \\ b = 2v \end{cases}$$

Que nos da como resultado: $a = 36$; $b = 48$; $m = 12$; $r = 24$; $v = 24$

18 Calcula la superficie ocupada por cada color.



Área del cuadrado = 1 m^2

Área del cuadrante del círculo = $\dfrac{\pi}{4}$ m^2

a = Área de la zona azul

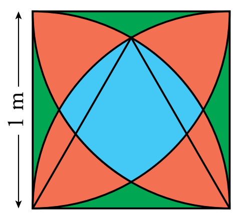
r = Área de cada una de las zonas rojas

v = Área de cada una de las zonas verdes

$$\begin{cases} a + 4v + 4r = 1 \quad \text{(I)} \\ a + 2v + 3r = \dfrac{\pi}{4} \quad \text{(II)} \\ a + 2r + v = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{4} \quad \text{(III)} \end{cases}$$

(I) Descomposición del cuadrado como suma de áreas.

(II) Descomposición del cuadrante del círculo como suma de áreas.



(III) El área del triángulo mixtilíneo formado por la zona azul, dos zonas rojas y una verde se puede calcular teniendo en cuenta la figura de la derecha. Como el triángulo dibujado es equilátero, su altura es $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Por tanto, su área es $\dfrac{1 \cdot (\sqrt{3}/2)}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ m^2. El área de cada uno de los sectores circulares centrados en los extremos de la base es $\dfrac{\pi \cdot 60°}{360°} = \dfrac{\pi}{6}$ m^2.

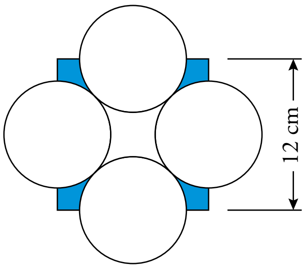
El área (III) es igual a la suma de las áreas de los dos sectores circulares centrados en los extremos de la base del triángulo menos el área del triángulo, es decir:

$$2 \cdot \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ m}^2$$

Se puede comprobar que la solución del sistema de ecuaciones es:

$$a = \frac{\pi}{3} + 1 - \sqrt{3} \text{ m}^2; \quad r = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \text{ m}^2; \quad v = 1 - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6} \text{ m}^2$$

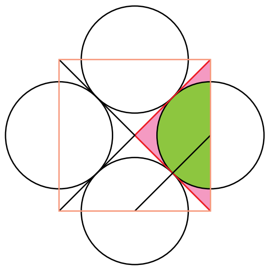
19 **Calcula la superficie de la zona coloreada sabiendo que los centros de las circunferencias están sobre los lados del cuadrado.**



Área del cuadrado = 144 cm^2

El radio de las circunferencias es la cuarta parte de la diagonal: $\dfrac{\sqrt{2 \cdot 144}}{4} = 3\sqrt{2}$

La zona roja del dibujo auxiliar es la mitad de la zona pedida.

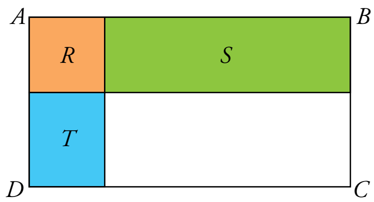


Área zona roja = Área triángulo – Área semicírculo = $\dfrac{12 \cdot 6}{2} - \dfrac{\pi(3\sqrt{2})^2}{2} = 36 - 9\pi$

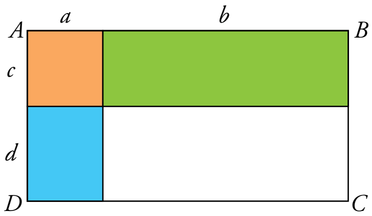
El área de la zona azul es el doble del área calculada: $2 \cdot (36 - 9\pi) = 72 - 18\pi$ cm^2

Área zona azul pedida= $72 - 18\pi$ cm^2

20 **El área del rectángulo *R* es de 4 m^2, la del rectángulo *S* es de 13 m^2 y la del rectángulo *T* es de 5 m^2. ¿Cuál es el área del rectángulo *ABCD*?**



Llamamos a, b, c, d a los lados de los rectángulos.



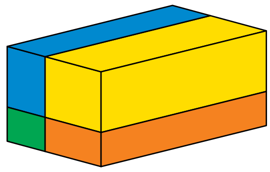
De las condiciones del problema sabemos:

$$\begin{cases} ac = 4 \\ bc = 13 \\ ad = 5 \end{cases} \xrightarrow[(1.^a)+(3.^a)]{(1.^a)+(2.^a)} \begin{cases} ac + bc = 17 \\ ac + ad = 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (a+b)c = 17 \\ a(c+d) = 9 \end{cases} \xrightarrow{(1.^a)\cdot(2.^a)} (a+b)c \cdot a(c+d) = 17 \cdot 9 \rightarrow$$

$$\rightarrow (c+d)(a+b) = \frac{17 \cdot 9}{c \cdot a} = \frac{17 \cdot 9}{4} = 38{,}25 \text{ m}^2$$

Que es el área pedida.

21 **Estas cuatro piezas de plástico son ortoedros:**



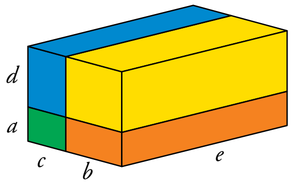
Se sabe que:

El volumen de la pieza azul es de 225 cm^3.

El volumen de la pieza roja es de 120 cm^3.

El volumen de la pieza verde es de 90 cm^3.

¿Cuál es el volumen de la pieza amarilla?



Volumen de la pieza azul: $cde = 225$ cm^3

Volumen de la pieza roja: $abe = 120$ cm^3

Volumen de la pieza verde: $ace = 90$ cm^3

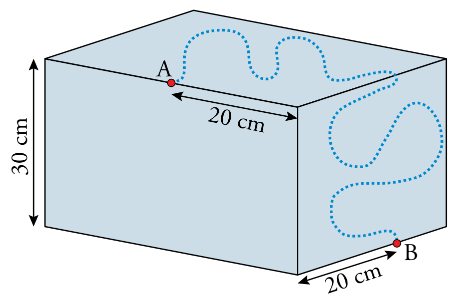
$$\begin{cases} cde = 225 \\ abe = 120 \\ ace = 90 \end{cases} \xrightarrow{\begin{smallmatrix}(1.^a) + (3.^a) \\ (2.^a) + (3.^a)\end{smallmatrix}} \begin{cases} ec(d + a) = 315 \\ ae(b + c) = 210 \end{cases} \xrightarrow{(1.^a) \cdot (2.^a)} ace^2(d + a)(b + c) = 315 \cdot 210 \to$$

$$\to \quad e(d + a)(b + c) = \frac{315 \cdot 210}{90} = 735$$

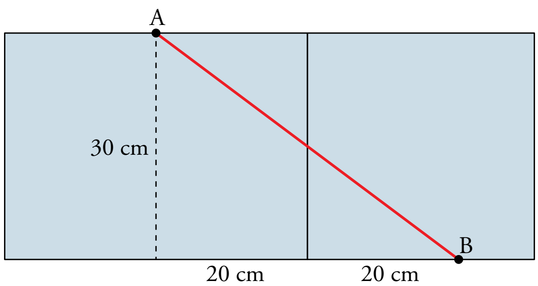
El volumen total es 735 cm^3. El volumen de la pieza amarilla es:

$735 - 225 - 120 - 90 = 300$ cm^3

22 **Una lagartija estaba tomando el sol sobre este bloque de piedra, en el punto A; pero al oírnos llegar, ha corrido a esconderse en B. Desde luego, no ha seguido el camino más corto. ¿Cuál es el camino más corto entre A y B? Halla su longitud.**



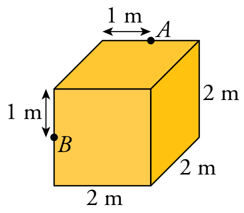
Ponemos las dos caras del bloque en un mismo plano:

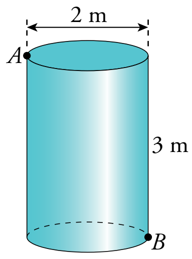


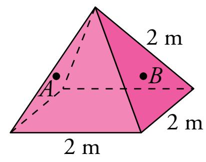
Este es el camino más corto.

Longitud más corta de A a B: $\sqrt{900 + 1\,600} = 50$ cm

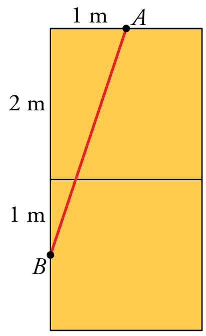
23 **Describe y halla la longitud del trayecto más corto que debe recorrer una lagartija para ir de *A* a *B* en cada caso. (En el tercer caso, *A* y *B* son centros de dos caras en una pirámide recta cuadrangular cuyas aristas miden, todas, 2 m).**





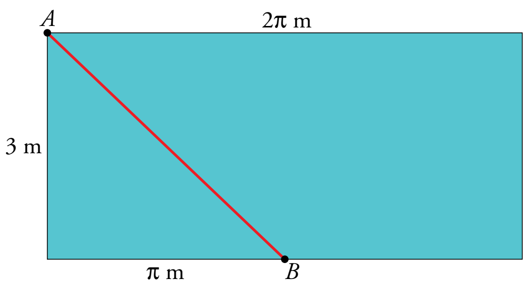


a) Ponemos las dos caras del bloque en un mismo plano:



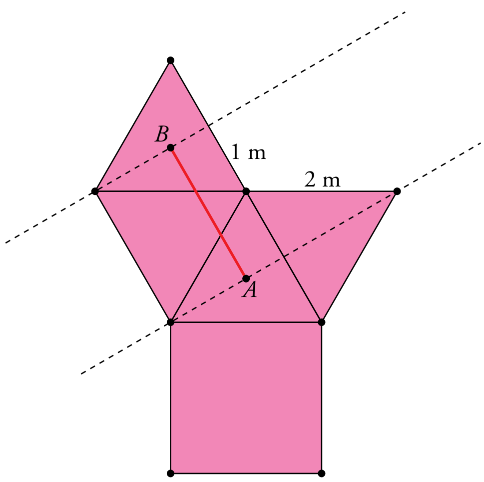
El camino más corto de A a B es una línea quebrada de longitud $\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$ m.

b) Hacemos el desarrollo del lado del cilindro y situamos los puntos A y B.



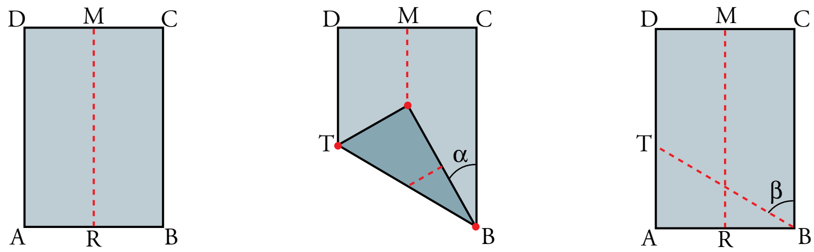
El camino más corto de A a B es una línea helicoidal de longitud $\sqrt{9+\pi^2}$ m.

c) Hacemos el desarrollo de la pirámide:



El camino más corto de A a B es un alínea quebrada de longitud 2 m.

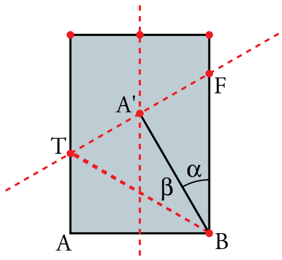
24 **Toma una hoja y haz con ella lo siguiente:**



a) ¿Cuánto valen los ángulos α y β?

b) ¿Podrías construir con la hoja de papel un triángulo equilátero?

a)

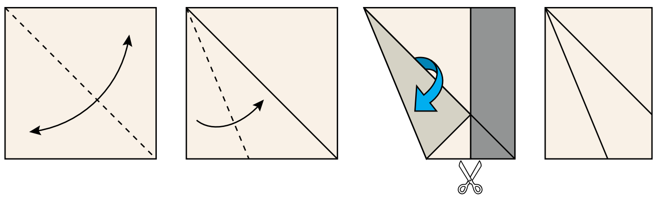


Los triángulos ABT, TA'B y FA'B son iguales, luego $\alpha = 30°$.

Con el mismo razonamiento, $\beta = 60°$.

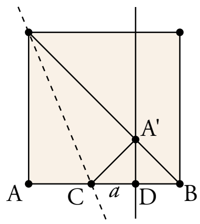
b) Cortando por BT y TF tenemos el triángulo equilátero.

25 **Indica por qué con este procedimiento podemos obtener un rectángulo formato DIN a partir de un cuadrado:**



* ***Recuerda que un rectángulo tiene formato DIN si el cociente entre las longitudes de sus lados es $\sqrt{2}$.***

Suponemos que el lado vertical mide 1 m.



El lado horizontal del rectángulo que estudiamos mide $1 - a$ según se ve en el dibujo.

Como $AC = CA'$, aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo CDA':

$$(1 - a)^2 = a^2 + a^2 \to 2a^2 - (1 - a)^2 = 0 \to a^2 + 2a - 1 = 0 \to a = \sqrt{2} - 1;\ a = -1 - \sqrt{2}$$

Solo vale la solución positiva menor que 1 $\to a = \sqrt{2} - 1$

Por tanto, el lado horizontal mide: $1 - a = 1 - (\sqrt{2} - 1) = \sqrt{2}$

Luego $\dfrac{\text{lado horizontal}}{\text{lado vertical}} = \sqrt{2}$.

Por tanto, tiene formato DIN.

Página 22

26 **Anselmo ha de tener en el horno un pollo durante 15 minutos exactos. Pero se le ha estropeado el reloj. Dispone de dos relojes de arena que miden 11 minutos y 7 minutos. ¿Cómo cronometrará con ellos los 15 minutos?**

Pone los dos relojes a la vez, cuando pasen 7 minutos, al reloj de 11 min le quedan 4 min.

Damos la vuelta a los dos relojes y medimos esos 4 min en el reloj de 7 min.

Damos la vuelta al reloj de 7 min y medimos otros 4 min.

Total: $7 + 4 + 4 = 15$ min.

27 **Ahora Anselmo ha de cronometrar los 45 minutos que tarda en hacerse un potaje. Para ello, dispone de dos mechas. Cada una de ellas tarda 1 hora en consumirse. Pero la velocidad con que se consumen es irregular (es decir, en un cuarto de hora no tiene por qué gastarse un cuarto de la longitud de la mecha). ¿Cómo podrá hacerlo?**

Enciende a la vez una mecha por los dos extremos y otra solo por uno. La primera mecha se consumirá a la media hora, quedándole solo media hora a la segunda mecha.

En el instante en que se consuma la primera mecha enciende el otro extremo de la segunda y así medirá los 15 min que quedan para los 45 min totales.

28 **Anselmo está en su casa de campo. Quiere saber la hora y solo dispone de un reloj de pared que se le ha parado, pero puede ponerlo en marcha dándole cuerda. Va a casa de su amiga, a unos 3 km, en la que hay otro reloj como el suyo. Pasa un rato charlando con ella y, a la vuelta, pone el reloj en hora con razonable precisión. Para ello, ¿qué otras cosas hace que no se describen aquí?**

Pone en marcha el reloj, por ejemplo, a las 12:00. Mide el tiempo que ha estado en casa de su amiga y toma nota de la hora de salida.

Cuando llega a la suya, ve el tiempo que ha pasado en su propio reloj. Le resta el tiempo que ha estado hablando con su amiga y la diferencia es el tiempo que ha tardado en ir y volver. La divide entre dos, se la suma a la hora de salida de la casa de su amiga y esa es la hora correcta que debe poner en su propio reloj.

29 **Divide el contenido de una jarra de 24 *l* en tres partes iguales, utilizando la jarra original y otras tres de 5 *l*, 11 *l* y 13 *l*.**

Llenamos la jarra de 13 *l* y con ella llenamos la de 5 *l* y nos quedan 8 *l* que es la tercera parte del total de líquido. Lo echamos en la jarra de 11 *l*.

Repetimos de nuevo y tenemos otros 8 *l* en la jarra de 13 *l*.

Devolvemos los 5 *l* a la jarra de 24 *l* y tenemos 8 *l* en cada jarra.

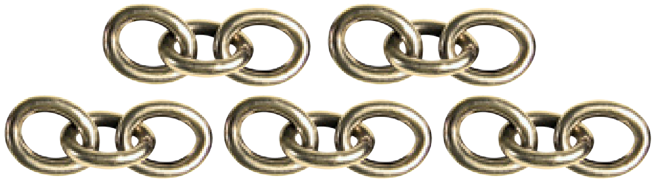
30 **Un tostador tuesta por un lado 2 rebanadas de pan juntas. A los 30 segundos damos la vuelta a las dos rebanadas y las tostamos por el otro lado. Por tanto, necesito un minuto para tostar 2 rebanadas. ¿Cuánto tiempo necesito como mínimo para tostar 3 rebanadas de pan por ambos lados?**

Empezamos tostando un lado de la 1.ª rebanada y otro de la 2.ª. Después, tostamos el otro lado de la 1.ª con un lado de la 3.ª. Por último, tostaríamos el otro lado de la 2.ª con el otro de la 3.ª. Así, necesitaríamos un minuto y medio para tostar las tres rebanadas de pan por los dos lados.

31 **Un cirujano debe operar a tres personas, pero solo tiene dos pares de guantes. ¿Cómo debe hacerlo si ni él ni los pacientes pueden tocar la sangre de los demás?**

El cirujano se pone los dos pares de guantes y opera al primer paciente. Se quita el primer par de guantes y opera al segundo paciente con el segundo par (que tenía debajo del primero). Le da la vuelta al primer par, poniéndoselo sobre el que tiene en las manos y, entonces, ya puede operar al tercer paciente.

32 **Se tienen cinco trozos de cadena de tres eslabones cada uno. ¿Cuál es el número mínimo de eslabones que habrá que abrir y volver a soldar para construir una sola cadena?**



Tres eslabones.

Se abren los tres eslabones de un trozo y con ellos se unen los cuatro trozos restantes entre sí.

33 **Un viajero pacta en una posada pagar cada día uno de los siete eslabones de su pulsera de plata, pero no desea estropearla demasiado, pues desea recuperarla cuando tenga dinero. ¿Cuál es el mínimo número de eslabones que necesita abrir?**

Solo debe cortar el tercer eslabón de la cadena, quedando partida en dos trozos, uno de 2 y otro de 4 eslabones. El pago sería de esta manera:

Día 1.º: Entrega el eslabón abierto.

Día 2.º: Retira el eslabón y entrega el trozo de 2 eslabones.

Día 3.º: Entrega el eslabón abierto (deja 3 en la posada).

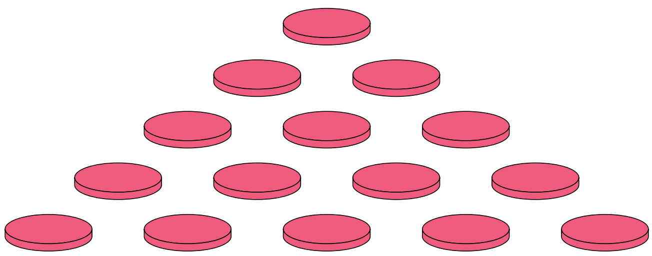
Día 4.º: Retira todo y entrega el trozo de 4 eslabones.

Día 5.º: Entrega el eslabón abierto (deja 5 en la posada).

Día 6.º: Retira el eslabón y entrega el trozo de 2 eslabones (deja 6 en la posada).

Día 7.º: Entrega el eslabón abierto, quedando los 7 en la posada.

34 **Se colocan 15 fichas sobre la mesa. Dos jugadores, turnándose, retiran, según su elección, una, dos o tres fichas cualesquiera. El que retire la última, pierde. Intenta encontrar la estrategia ganadora.**



Supongamos que los jugadores son J y K.

Como ambos jugadores pueden retirar entre 1 y 3 fichas, el jugador que deja una puede jugar para que la suma sea 4 y, por tanto, la persona que juegue cuando quedan 5 fichas sobre la mesa pierde si se juega así:

Quedan 5 monedas.

J retira 1 → K retira 3 → Queda 1 y J pierde.

J retira 2 → K retira 2 → Queda 1 y J pierde.

J retira 3 → K retira 1 → Queda 1 y J pierde.

Razonamos hacia atrás de la misma manera: el jugador que juegue cuando quedan 9 fichas pierde porque en la ronda siguiente se pueden retirar 4 fichas entre los dos jugadores.

Si quedan 9 fichas:

J retira 1 → K retira 3 → Quedan 5 fichas y J pierde (si se juega con la estrategia anterior).

J retira 2 → K retira 2 → Quedan 5 fichas y J pierde.

J retira 3 → K retira 1 → Quedan 5 fichas y J pierde.

Este argumento nos lleva a que el jugador que juegue cuando quedan 13 fichas pierde si se retiran 4 fichas en la ronda siguiente entre los dos jugadores.

Por tanto, la jugada del jugador que empieza la partida debe ser la de retirar 2 fichas para que queden 13 sobre la mesa y, así, poder aplicar la estrategia anterior.

35 Hay dos montones de piedras, uno con 7 piedras y otro con 6 piedras. Dos personas juegan de manera alternativa, pudiendo retirar tantas piedras como deseen, pero solo de uno de los montones. Gana quien retire la última piedra. ¿Quién tiene ventaja, el jugador que comienza o el otro?

El primer jugador puede ganar siempre si juega igualando el número de piedras de los dos montones. Es claro que entonces el otro jugador no puede hacer otra cosa que desigualarlos.

36 En ambas orillas de un río hay una palmera. La más alta mide 30 m; la más baja, 20 m, y la distancia entre ambas es de 50 m. En la copa de cada palmera hay un pájaro. Al descubrir los dos pájaros un pez en la superficie del río, se lanzan a por él rápidamente, alcanzándolo al mismo tiempo. ¿A qué distancia del tronco de la palmera más alta apareció el pez?

x = distancia del pez al tronco de la palmera más alta.

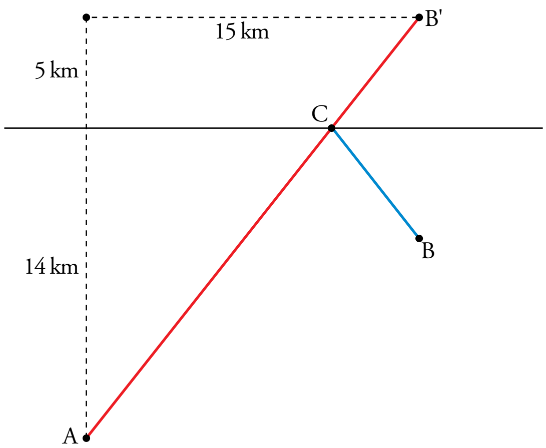
$50 - x$ = distancia del pez al tronco de la palmera más baja.

La distancia de los dos pájaros al pez es la misma:

$$900 + x^2 = (50 - x)^2 + 400 \;\rightarrow\; x = 20$$

Está a 20 m de la palmera más alta.

37 Dos localidades A y B se encuentran al mismo lado de una autopista recta, de la cual distan 14 km y 5 km, respectivamente. Se desea construir una carretera lo más corta posible que una ambas localidades pasando por la autopista. Sabiendo que la distancia entre A y B es de 15 km, halla la longitud de la carretera.



Dibujamos el punto simétrico de B respecto a la autopista.

El camino más corto será la recta AB'. Luego el camino más corto debe pasar por C.

La longitud de la carretera es:

$$\sqrt{15^2 + 19^2} = \sqrt{586} \approx 24{,}21 \text{ km}$$

38 Héctor es aficionado a los coches y tiene un gran montón de cromos de ellos. Leticia es aficionada a las motos y tiene muchos cromos de motos. Un día Héctor, complaciente, le regala 40 de sus cromos a Leticia. Como son del mismo tamaño, ella los mezcla con los suyos. Más tarde se pelean y Héctor le pide que le devuelva sus cromos. Leticia, muy digna, cuenta 40 cromos cualesquiera y se los da. Él los mezcla con los suyos. ¿Hay más cromos de motos entre los de coches de Héctor o más cromos de coches entre los de motos de Leticia?

El número de cromos que se intercambian es 40 en los dos casos. Luego, después de los cambios, los dos tienen la misma cantidad de cromos que tenían en un principio.

Los cromos de motos que tiene Héctor son los que le faltan a Leticia (y Leticia sigue teniendo el mismo número de cromos que tenía en un principio; luego los cromos que le faltan de motos ahora son de coches).

Por tanto, el número de cromos de motos que hay entre los coches de Héctor es el mismo número de cromos de coches que hay entre las motos de Leticia.

39 Tienes dos jarras, una con zumo y otra con agua, y un vaso vacío. Llenamos el vaso con zumo de la primera jarra y lo vertemos en la jarra de agua. Una vez mezclado, se vuelve a llenar el vaso con mezcla de la segunda jarra y se vierte en la primera. ¿Hay más zumo en el agua que agua en el zumo? ¿Es al contrario? ¿Hay, acaso, la misma cantidad de zumo en el agua que de agua en el zumo? ¿O depende de las cantidades de cada una que tuviéramos al principio?

Algo semejante a lo dicho en el problema anterior ocurre con el agua y el zumo: al final del proceso, la cantidad de líquido que hay en las dos jarras es la misma que había en un principio. Luego la cantidad de agua que hay ahora en la jarra de zumo es la que falta de agua en la jarra de agua (que está sustituida por zumo).

Por tanto, hay la misma cantidad de zumo en el agua que de agua en el zumo.

Página 23

40 Tres exploradores y tres caníbales deben cruzar un río con una sola barca. Además:

En la barca solo pueden viajar una o dos personas y al menos uno debe saber remar.

Saben remar los 3 exploradores y un caníbal.

En ninguna orilla los caníbales pueden superar en número a los exploradores, pues se los comerían.

¿Cómo conseguirán cruzar el río?

* ***Distingue el caníbal que sabe remar de los demás.***

1.°: Cruza un explorador con un caníbal que no sabe remar y vuelve el explorador.

2.°: Cruzan el caníbal remero y el otro caníbal, y vuelve el caníbal remero.

3.°: Cruzan dos exploradores y vuelven un explorador y un caníbal.

4.°: Cruzan un explorador y el caníbal remero, y vuelve un explorador con un caníbal que no sabe remar.

5.°: Cruzan los dos exploradores y vuelve el caníbal remero.

6.°: Cruzan el caníbal remero y otro caníbal, y vuelve el remero.

7.°: Cruzan el caníbal remero y el otro caníbal que quedaba.

41 **Óscar quiere pasar al otro lado del río con su oveja, su lobo y su col gigante. En la barca solo cabe él con una de las tres cosas. El problema es que el lobo no se puede quedar solo con la oveja, porque se la comería, y la oveja tampoco puede quedarse sola con la col.**

¿Qué pasos debe dar Óscar?

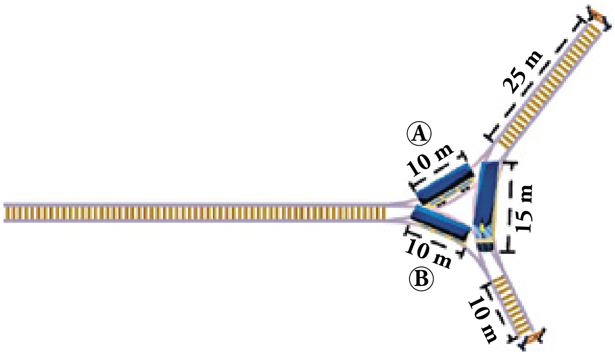
Supongamos que inicialmente están al lado izquierdo del río. Los pasos son:

- Pasa Óscar con la oveja al lado derecho del río; la deja allí y regresa él solo a la orilla izquierda.
- Pasa Óscar con la col a la orilla derecha, deja allí la col y regresa a la orilla izquierda con la oveja.
- Pasa Óscar con el lobo a la orilla derecha y lo deja allí junto con la col. Óscar regresa a la otra orilla solo.
- Coge la oveja y cruza el río hacia la orilla derecha donde se encuentran la col y el lobo.

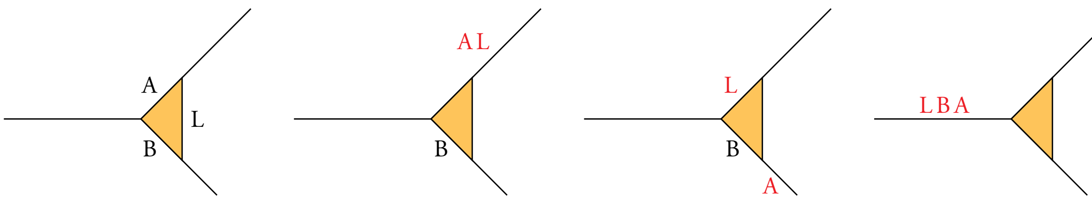
42 **Ángel, Ben, Cris y Dora quieren cruzar un río en una canoa que solo puede cargar 100 kg. Ángel pesa 90 kg; Ben, 80 kg; Cris, 60 kg; Dora, 40 kg, y las provisiones, 20 kg. ¿Cómo pueden cruzar?**

- Primero cruzan Cris y Dora (60 + 40 = 100 kg). Se queda Dora y Cris regresa.
- Pasan Ben y las provisiones (80 + 20 = 100 kg). Se queda Ben con las provisiones y Dora regresa.
- Pasa Ángel solo (100 kg). Se queda con las provisiones y Ben regresa.
- Pasan Cris y Dora (60 + 40 = 100 kg). Se queda Cris y regresa Dora.
- Pasa Ben (80 kg) y regresa Cris.
- Pasan Cris y Dora (60 + 40 kg).

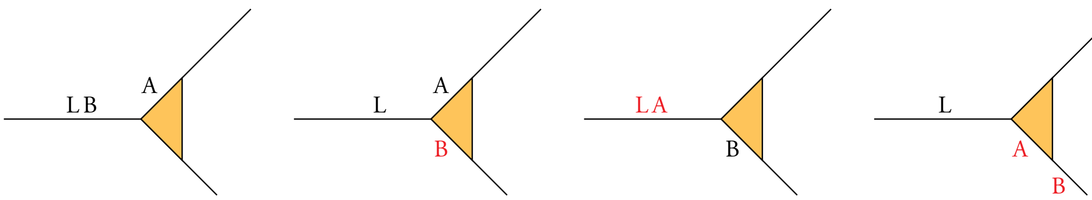
43 **¿Cómo intercambiarías entre sí los vagones A y B dejando la locomotora en su posición original? Ten en cuenta que la locomotora puede actuar sobre los vagones empujando o tirando de ellos. Además, en la vía muerta que mide 10 m no puede dar la vuelta.**



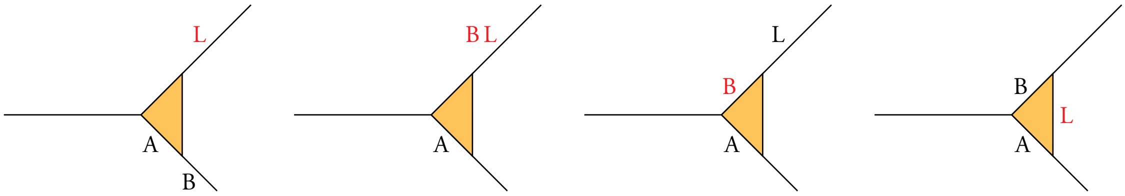
En primer lugar, colocamos los dos vagones a un lado de la locomotora L (en rojo están los que se mueven y en negro los que no varían su posición).



Ahora intercambiamos el orden de los vagones.



Por último, colocamos el vagón B en su sitio.



Observa que es importante el orden en el que están los vagones con la locomotora en cada vía.

44 **¿En qué número termina 2^{83}?**

* ***Observa en qué cifra terminan las sucesivas potencias de base 2 y busca una regla.***

$2^1 = 2$; $2^2 = 4$; $2^3 = 8$; $2^4 = 16$; $2^5 = 32$; $2^6 = 64$; …

Cada cuatro potencias se repite el número final.

$83 = 4 \cdot 20 + 3 \;\rightarrow\; 2^{83}$ acaba igual que 2^3, luego acaba en 8.

45 **¿Sabrías decir en qué cifra termina la potencia 7^{70}? ¿Y $2^{103} + 3$?**

- $7^1 = 7$; $7^2 = 49$; $7^3 = 343$; $7^4 = 2\,401$; $7^5 = 16\,807$; $7^6 = 117\,649$; …

  Cada cuatro potencias se repite el número final.

  $70 = 4 \cdot 17 + 2 \;\rightarrow\; 7^{70}$ acaba igual que 7^2, luego acaba en 9.

- Es fácil observar que las terminaciones de las potencias de 2 son siempre 2, 4, 8 y 6 (en ese orden). Por tanto, 2^{100} termina en 6 y 2^{103} termina en 8.

  Así, $2^{103} + 3$ termina en 1.

46 **Si escribimos los números naturales seguidos de la siguiente manera:**

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 …

¿qué dígito ocupará el lugar cien mil?

Al colocar en la fila el 9 999, el último 9 ocupa el lugar:

$9 + 2 \times 90 + 3 \times 900 + 4 \times 9\,000 = 38\,889$

Como $100\,000 = 38\,889 + 61\,111$, el problema ahora es:

10 000   10 001   10 002 …

¿Qué dígito ocupa el lugar 61 111?

Al colocar en esta lista el 69 999 hemos colocado 60 000 dígitos.

Por tanto, ahora el problema es:

Empezando así:

70 000   70 001   70 002   70 003 …

¿Qué dígito ocupa el lugar 1 111?

Como $1111 = 5 \times 222 + 1$, al colocar el 70 221 se han colocado 5×222 dígitos.

Por tanto, el dígito solución del problema inicial es el 7.

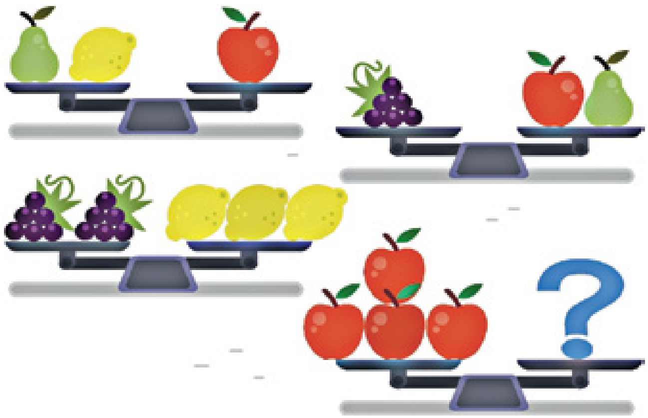
47 **Averigua en cuántos ceros acaba el número 125!.**

* ***Recuerda que 125! = 1 · 2 · 3 · … · 123 · 124 · 125.***

Cuenta el número de veces que aparece el factor 5 (el factor 2 va a aparecer más veces).

Es $25 + 5 + 1 = 31$. Termina en 31 ceros.

48 **¿Cuántos limones equilibran la balanza?**



l: peso de un limón

p: peso de una pera

m: peso de una manzana

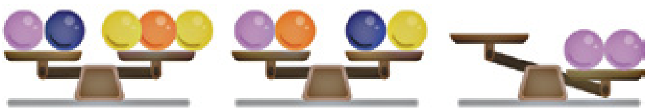
u: peso de un racimo de uvas

$$\begin{cases} l + p = m \\ p + m = u \\ 2u = 3l \end{cases}$$

Ponemos la solución de este sistema en función de l: $m = \frac{5}{4}l$; $p = \frac{1}{4}l$; $u = \frac{3}{2}l$

Por tanto, $4m = 5l \rightarrow$ Para equilibrar 4 manzanas hacen falta 5 limones.

49 **¿Qué habría que colocar en el platillo vacío para equilibrar la última balanza?**



Expresamos las balanzas como ecuaciones:

a: peso de la bola amarilla

b: peso de la bola azul

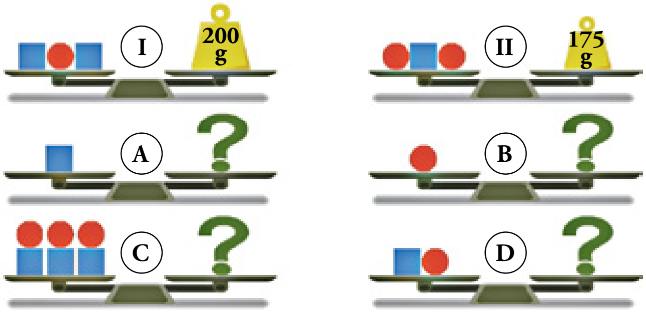
m: peso de la bola morada

n: peso de la bola naranja

$$\begin{cases} b + m = 2a + n \\ m + n = a + b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m = 2a + n - b \\ m = a + b - n \end{cases} \rightarrow 2m = 3a$$

La balanza se equilibra con 3 bolas amarillas.

50 **Observa y resuelve.**



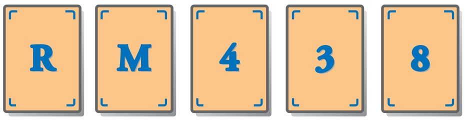
Uniendo I y II obtenemos C $\rightarrow$ C = 375 g

D es $\frac{1}{3}$ de C $\rightarrow$ D = 125 g

Si de I eliminamos lo que contiene D, obtenemos A $\rightarrow$ A = 75 g

Si de II elminamos el contenido de D, obtenemos B $\rightarrow$ B = 50 g

51 **En una mesa hay cinco cartas:**



Cada carta tiene, en un lado, un número natural, y en el otro, una letra.

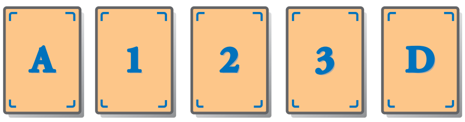
Enrique afirma: "Cualquier carta que tenga en un lado una vocal, tiene un número par en el otro lado".

¿A qué cartas tuvo que dar la vuelta Pedro para convencerse de que Enrique decía la verdad?

Para confirmar las palabras de su amigo, Pedro debió dar la vuelta al 3 y encontrar una consonante. Desechamos los demás casos:

- Da la vuelta a la R o a la M: es indiferente lo que haya tras ellas, pues el enunciado no dice nada sobre las consonantes.
- Da la vuelta al 4 o al 8: también es indiferente pues, si sale vocal, confirma las palabras de Enrique y, si sale consonante, estamos en el caso anterior.

52 **Si en el ejercicio anterior hubiera estas cartas, ¿cuáles tendría que levantar Pedro para saber que Enrique decía la verdad?**



La carta de la A.

Página 24

53 **En una clase hay 30 alumnos, de los cuales 22 estudian inglés y 15 estudian informática. Si todos estudian inglés o informática, ¿cuántos estudian solo inglés? ¿Y solo informática? ¿Cuántos estudian las dos cosas?**

Hallamos el número de alumnos que estudian las dos cosas:

$22 + 15 = 37$

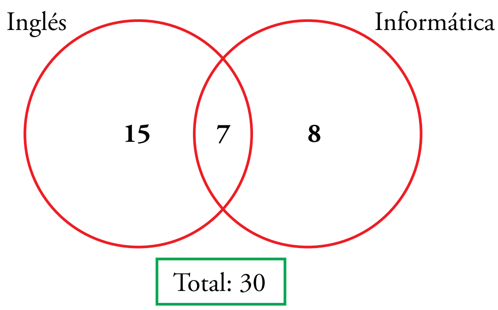
$37 - 30 = 7$ alumnos estudian las dos cosas

Por tanto:

$22 - 7 = 15$ estudian solo inglés

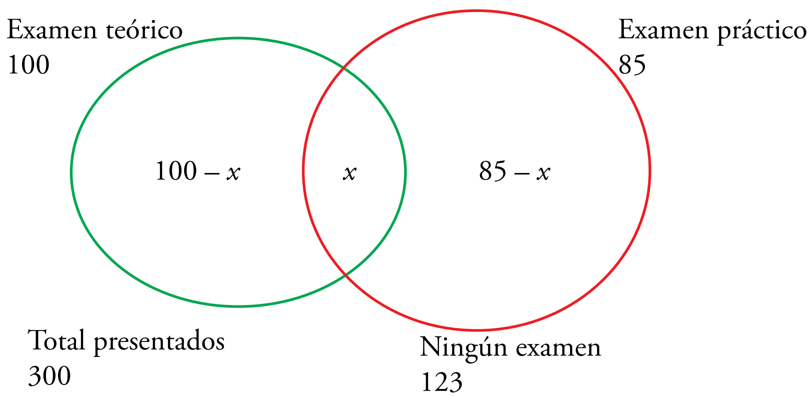
$15 - 7 = 8$ estudian solo informática

En un diagrama sería así:



54 **Se han presentado 300 personas a una oposición, de las cuales 123 no han aprobado ningún examen. Si 100 han aprobado el examen teórico y 85 el práctico, ¿cuántos candidatos han superado los dos exámenes?**

x = número de personas que han aprobado los dos exámenes



Los que han aprobado algún examen son: $300 - 123 = 177$

Por otra parte, los que han aprobado algún examen son:

$x + (100 - x) + (85 - x) = 185 - x$

Como las dos expresiones deben ser iguales:

$185 - x = 177 \rightarrow x = 8$

Han aprobado los dos exámenes 8 personas.

55 **Este juego consiste en encontrar un número de cuatro cifras que no empieza por cero.**

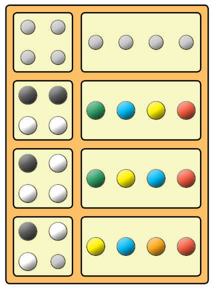
Escrito un número en la tabla, en la columna B se indica cuántos dígitos tiene en común con el número buscado y en la misma posición; y en la columna R se indica cuántos dígitos tiene ese número en común con el buscado, pero en posición incorrecta.

Con los datos de la siguiente tabla, ¿serías capaz de encontrar el número oculto?

	B	R
3476	0	2
3965	0	2
4269	0	1
1057	2	1

6157

56 **En el juego *MasterMind* un jugador, A, debe colocar 4 colores en una cierta posición y el otro, B, ha de acertar los colores y su disposición.**



En este tablero, la columna de la izquierda indica con negras las fichas de color bien colocadas y con blancas las que tienen color correcto pero están mal colocadas. En la columna de la derecha están las disposiciones de colores que prueba el jugador B.

Con estos datos, ¿serías capaz de dar la disposición de colores correcta?

Nos fijamos en la última jugada.

Como hay una pareja en su sitio, razonamos por parejas:

- Si está en su sitio la pareja verde y roja → La segunda jugada es imposible.
- Si está en su sitio la pareja azul y roja → La primera jugada es imposible.
- Si suponemos que está en su sitio la pareja amarilla y roja → Hay que permutar los colores azul y verde.

Con la disposición azul, verde, amarillo y rojo, son posibles las tres jugadas, luego esa es la disposición correcta de los colores.

57 **En un partido de baloncesto se va por el resultado 8-0. Si sabemos que no se ha marcado ningún triple, ¿de cuántas formas se ha podido llegar a ese resultado? (Comprueba que son 34).**

Para resolver este problema usaremos las permutaciones con repetición para cada una de las formas de conseguir 8 puntos:

POSIBILIDADES	N.° DE PERMUTACIONES
2 + 2 + 2 + 2	1
2 + 2 + 2 + 1 + 1	$\frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$
2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1	$\frac{6!}{4! \cdot 2!} = 15$
2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1	7
1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1	1

En total son 34 formas diferentes.

58 **Averigua de cuántas formas se puede llegar al resultado 4-4 en un partido de baloncesto sin triples. (Por asombroso que parezca hay 556 formas. Compruébalo).**

Llamamos A y B a los equipos que juegan. Representamos mediante $A1$ y $A2$ las canastas de 1 y de 2 puntos del equipo A. $B1$ y $B2$ tendrán significado similar.

POSIBILIDADES	N.° DE PERMUTACIONES
$A2 + A2 + B2 + B2$	$\frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$
$A2 + A2 + B2 + B1 + B1$	$\frac{5!}{2! \cdot 2!} = 30$
$A2 + A2 + B1 + B1 + B1 + B1$	$\frac{6!}{2! \cdot 4!} = 15$
$A2 + A1 + A1 + B2 + B2$	$\frac{5!}{2! \cdot 2!} = 30$
$A2 + A1 + A1 + B2 + B1 + B1$	$\frac{6!}{2! \cdot 2!} = 180$
$A2 + A1 + A1 + B1 + B1 + B1 + B1$	$\frac{7!}{2! \cdot 4!} = 105$
$A1 + A1 + A1 + A1 + B2 + B2$	$\frac{6!}{4! \cdot 2!} = 15$
$A1 + A1 + A1 + A1 + B2 + B1 + B1$	$\frac{7!}{4! \cdot 2!} = 105$
$A1 + A1 + A1 + A1 + B1 + B1 + B1 + B1$	$\frac{8!}{4! \cdot 4!} = 70$

En total son $6 + 30 + 15 + 30 + 180 + 105 + 15 + 105 + 70 = 556$.

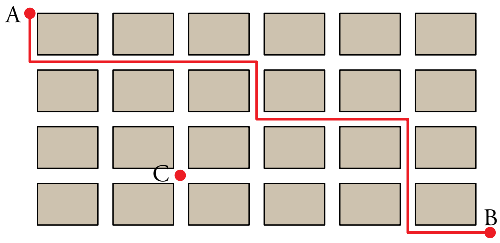
59 **Verifica que si en un partido de baloncesto se ha llegado en un cierto momento al resultado 4-4, esto ha podido ser de 784 formas distintas (ten en cuenta que se han podido marcar canastas de 1, 2 y 3 puntos).**

En esta ocasión, a los casos anteriores debemos sumar aquellos en los que se han marcado canastas de 3 puntos. Las nuevas posibilidades son:

POSIBILIDADES	N.° DE PERMUTACIONES
$A3 + A1 + B3 + B1$	$4! = 24$
$A3 + A1 + B2 + B2$	$\frac{4!}{2!} = 12$
$A3 + A1 + B2 + B1 + B1$	$\frac{5!}{2!} = 60$
$A3 + A1 + B1 + B1 + B1 + B1$	$\frac{6!}{4!} = 30$
$A2 + A2 + B3 + B1$	$\frac{4!}{2!} = 12$
$A2 + A1 + A1 + B3 + B1$	$\frac{5!}{2!} = 60$
$A1 + A1 + A1 + A1 + B3 + B1$	$\frac{6!}{4!} = 30$

En total, $24 + 2 \cdot (12 + 60 + 30) = 228$ nuevas permutaciones, que sumadas a las 556 del problema anterior hacen un total de 784 posibilidades.

60 **Observa esta cuadrícula:**



a) ¿Cuántos caminos de longitud mínima hay para ir de A a C?

b) ¿Cuántos hay para ir de C a B?

c) ¿Cuántos hay para ir del punto A al B, pasando por C?

d) ¿Cuántos hay para ir de A a B?

Representamos cada paso hacia la derecha con la letra *d*, y cada paso hacia abajo con la letra *a*.

a) Para ir de A a C hay que dar 2 pasos a la derecha y 3 hacia abajo.

Cada camino se puede representar como una permutación de las letras *ddaaa*. Por tanto, se trata de un problema de permutaciones con repetición. El número de caminos distintos que hay desde A hasta C es $\frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$.

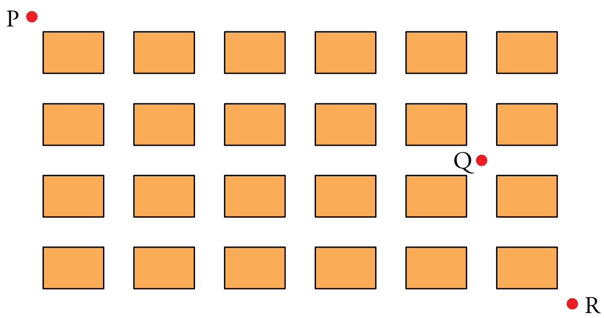
b) Para ir de C a B hay que dar 4 pasos a la derecha y 1 hacia abajo.

Cada camino se puede representar como una permutación de las letras *dddda*. Hay 5 caminos distintos desde C hasta B ya que en cada permutación solo cambia la posición de la letra *a*.

c) Cada camino que llega a C se puede continuar con un camino que sale de C. Por tanto, hay $10 \cdot 5 = 50$ caminos.

d) Ahora son 6 pasos a la derecha y 4 hacia abajo. Esto da lugar a $\frac{10!}{6! \cdot 4!} = 210$ caminos diferentes.

61 **Sergio sabe que Lupe va a ir de P a R. Decide esperarla en Q. ¿Cuál es la probabilidad de que se encuentren?**



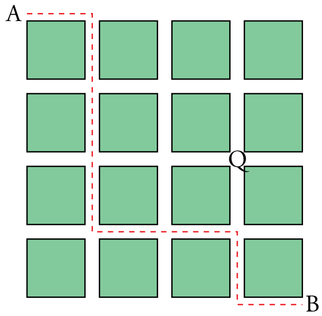
La probabilidad buscada será el cociente entre el número de caminos de longitud mínima que pasan por Q y el número total de caminos de longitud mínima.

Razonando de forma análoga al problema anterior, tenemos:

- N.º de caminos desde P hasta Q: $\frac{7!}{5! \cdot 2!} = 21$
- N.º de caminos desde Q hasta R: $\frac{3!}{1! \cdot 2!} = 3$
- N.º de caminos de P a R que pasan por Q: $21 \cdot 3 = 63$
- N.º total de caminos de P a R: $\frac{10!}{6! \cdot 4!} = 210$

Probabilidad de que se encuentren en $Q = \frac{63}{210} = \frac{3}{10}$.

62 **María va de A a B siguiendo el itinerario marcado en rojo. Pero podría haber seguido otros muchos. ¿Cuántos? ¿Y si quiere pasar, primero, por el quiosco Q para comprar el diario?**



Podemos razonar de la misma forma que en los problemas anteriores.

Para ir desde A hasta B debe dar 4 pasos a la derecha y 4 pasos hacia abajo, habiendo un total de $\frac{8!}{4! \cdot 4!} = 70$ caminos distintos.

El número de caminos que hay desde A hasta Q es $\frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$.

El número de caminos que hay desde Q hasta B es $\frac{3!}{1! \cdot 2!} = 3$.

El número de caminos de A hasta B que pasan por Q es $10 \cdot 3 = 30$.

63 **¿De cuántas formas se puede formar la palabra MATES uniendo letras contiguas en esta figura?**

M
A A
T T T
E E E E
S S S S S
E E E E
T T T
A A
M

Podemos construir la palabra MATES empezando por el vértice superior o por el inferior. Por la simetría del dibujo, podemos calcular el número de formas que hay empezando por el vértice superior y multiplicar el resultado por 2.

Ahora bien, lo que debemos contar es el número de formas distintas de llegar a cada una de las letras S de la quinta fila a partir de la M del vértice superior (bajando de fila en fila, por supuesto).

Se puede comprobar que, según la posición de cada letra S (de izquierda a derecha), el número de formas es 1, 4, 6, 4, 1 (respectivamente), haciendo un total de 16.

Por tanto, si tenemos en cuenta las que empiezan por la letra M del vértice inferior, hay $2 \cdot 16 = 32$ formas distintas.