Autoevaluación

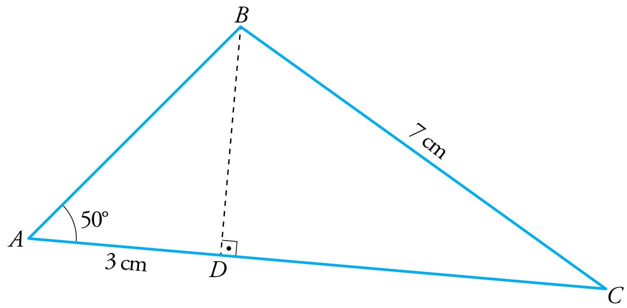
Página 166

1 Halla el lado de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de radio 8 cm.

El ángulo central del pentágono regular es $\frac{360°}{5} = 72°$.

Si l representa al lado: $sen\ 36° = \frac{l/2}{8} \rightarrow l = 16\ sen\ 36° = 9,4$ cm

2 Calcula los lados y los ángulos del triángulo *ABC*.



$cos\ 50° = \frac{3}{\overline{AB}} \rightarrow \overline{AB} = \frac{3}{cos\ 50°} = 4,67$ cm

$tg\ 50° = \frac{\overline{BD}}{3} \rightarrow \overline{BD} = 3 \cdot tg\ 50° = 3,58$ cm

$\overline{DC}^2 + 3,58^2 = 7^2 \rightarrow \overline{DC} = \sqrt{7^2 - 3,58^2} = 6,02$ cm

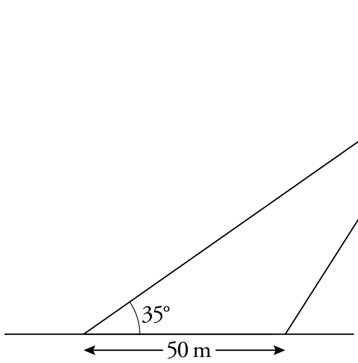
$\overline{AC} = 3 + 6,02 = 9,02$ cm

$sen\ \hat{C} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} = \frac{3,58}{7} = 0,511$

$\hat{C} = 30°\ 43'\ 49,66''$

$\hat{B} = 180° - 50° - 30°\ 43'\ 49,66'' = 99°\ 16'\ 10,34''$

3 Un globo aerostático está sujeto al suelo en dos puntos que distan entre sí 50 m. El cable más corto mide 75 m y el más largo forma un ángulo de 35° con el suelo. Halla la altura a la que se encuentra el globo y la longitud del cable más largo.



Llamemos h a la altura del globo y x a la distancia desde la base de esa altura hasta el cable más corto.

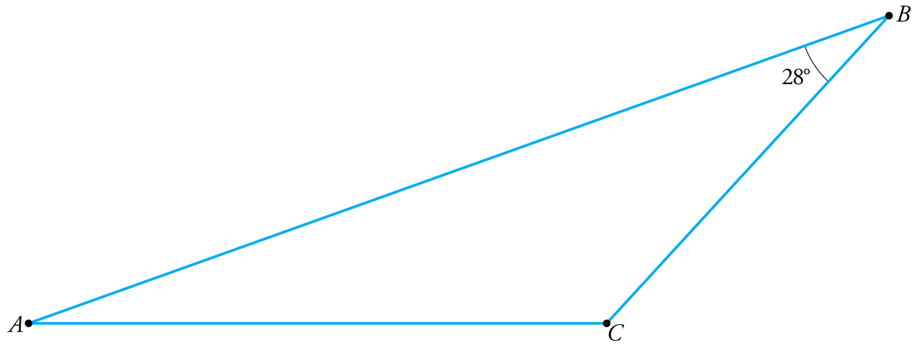
$$\begin{cases} tg\ 35° = \frac{h}{50 + x} \rightarrow h = tg\ 35° (50 + x) \rightarrow h = 0,7(50 + x) \rightarrow h = 3,5 + 0,7x \\ x^2 + h^2 = 75^2 \end{cases}$$

$x^2 + (3,5 + 0,7x)^2 = 75^2 \rightarrow 1,49x^2 + 4,9x - 5612,75 = 0$, que da lugar a una solución válida, $x = 59,7$ m.

La altura del globo es $h = 3,5 + 0,7 \cdot 59,7 = 45,29$ m

La longitud del cable más largo es $\sqrt{(50 + 59,7)^2 + 45,29^2} = 118,68$ m

4 **En un triángulo ABC conocemos $\overline{AC} = 115$ m, $\overline{BC} = 83$ m y $\widehat{ABC} = 28°$. Calcula los demás elementos del triángulo. ¿Podemos asegurar que $\overline{AB} > \overline{AC}$?**



$$\frac{115}{sen\,28°} = \frac{83}{sen\,\hat{A}} \to sen\,\hat{A} = \frac{83 \cdot sen\,28°}{115} = 0,34 \to \hat{A} = 19°\,52'\,37''$$

$$\hat{C} = 180° - (28° + 19°\,52'\,37'') = 132°\,7'\,23''$$

$$\frac{115}{sen\,28°} = \frac{\overline{AB}}{sen\,\hat{C}} \to \overline{AB} = \frac{115 \cdot sen\,\hat{C}}{sen\,28°} = 181,7 \text{ m}$$

Sí podemos asegurarlo porque los ángulos opuestos respectivos cumplen que $\hat{C} > \hat{B}$.

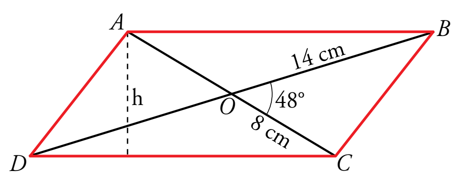
5 **Justifica si existe algún ángulo α tal que $tg\,\alpha = \frac{2}{3}$ y $sen\,\alpha = \frac{1}{2}$.**

$$tg\,\alpha = \frac{2}{3} \to \frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} = \frac{2}{3} \to cos\,\alpha = \frac{3}{2}\,sen\,\alpha = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

$$sen^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{13}{16} \neq 1$$

No se satisface la identidad fundamental, luego no existe tal ángulo.

6 **Las diagonales de un paralelogramo miden 16 cm y 28 cm y forman un ángulo de 48°. Calcula el perímetro y el área de dicho paralelogramo.**



Utilizamos el teorema del coseno en los triángulos BOC y AOB.

$$\overline{BC}^2 = 14^2 + 8^2 - 2 \cdot 14 \cdot 8\,cos\,48° \to \overline{BC} = 10,49 \text{ cm}$$

$$\overline{AB}^2 = 14^2 + 8^2 - 2 \cdot 14 \cdot 8\,cos\,(180° - 48°) \to \overline{AB} = 20,25 \text{ cm}$$

Perímetro = (10,49 + 20,25) · 2 = 61,48 cm

Para hallar el área, necesitamos conocer un ángulo del paralelogramo.

Hallamos el ángulo $\hat{A}$ del triángulo AOB.

$$\frac{14}{sen\,\widehat{BAO}} = \frac{20,35}{sen\,132°} \to sen\,\widehat{BAO} = \frac{14 \cdot sen\,132°}{20,25} \to \widehat{BAO} = 30°\,54'\,57''$$

En el triángulo ACD, hallamos la altura.

$$\widehat{BAO} = \widehat{ACD} \to sen\,30°\,54'\,57'' = \frac{h}{16} \to h = 8,22 \text{ cm}$$

$$\text{Área} = \frac{20,25 \cdot 8,22}{2} = 83,23 \text{ cm}^2$$

7 **Busca, en cada caso, un ángulo del primer cuadrante que tenga una razón trigonométrica igual que el ángulo dado y di cuál es esa razón.**

a) 297° **b) 1 252°** **c) –100°** **d)** $\frac{13\pi}{5}$

a) $297° = 360° - 63° \rightarrow cos\ 297° = cos\ 63°$

b) $1\,252° = 360° \cdot 3 + 172°;\ 172° = 180° - 8°;\ sen\ 1\,252° = sen\ 8°$

c) $-100° + 360° = 260°;\ 260° = 180° + 80°;\ tg\ (-100°) = tg\ 80°$

d) $\frac{13\pi}{5} = 2\pi + \frac{3\pi}{5};\ \frac{3\pi}{5} = \pi - \frac{2\pi}{5};\ sen\ \frac{13\pi}{5} = sen\ \frac{2\pi}{5}$

8 **Si** $tg\ \alpha = 2$ **y** $cos\ \alpha > 0$**, halla:**

a) $cos\ 2\alpha$ **b)** $sen\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ **c)** $sen\ \frac{\alpha}{2}$ **d)** $tg\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$

$tg\ \alpha = 2$ y $cos\ \alpha > 0$, α está en el primer cuadrante.

$$1 + tg^2\ \alpha = \frac{1}{cos^2\ \alpha} \rightarrow 5 = \frac{1}{cos^2\ \alpha} \rightarrow cos^2\ \alpha = \frac{1}{5} \rightarrow cos\ \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = tg\ \alpha \rightarrow \frac{sen\ \alpha}{\sqrt{5}/5} = 2 \rightarrow sen\ \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

a) $cos\ 2\alpha = cos^2\ \alpha - sen^2\ \alpha = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 - \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 = \frac{1}{5} - \frac{4}{5} = -\frac{3}{5}$

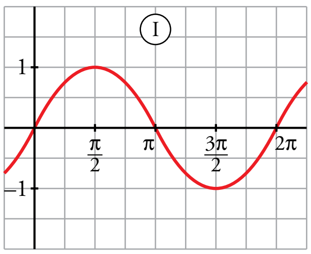
b) $sen\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = cos\ \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$

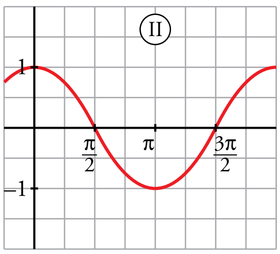
c) $sen\ \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - cos\ \alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1 - (\sqrt{5}/5)}{2}} = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}}$

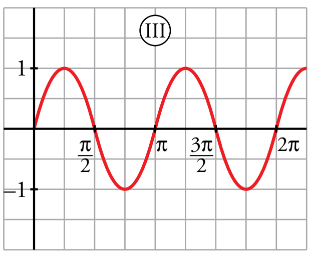
d) $tg\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{tg\ \frac{\pi}{4} + tg\ \alpha}{1 - tg\ \frac{\pi}{4} \cdot tg\ \alpha} = \frac{1 + 2}{1 - 2} = -3$

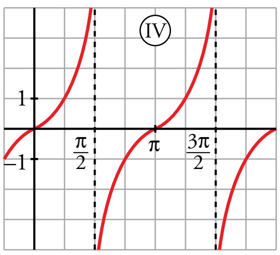
9 **Asocia a cada gráfica una de estas fórmulas:**

a) $y = tg\ x$ **b)** $y = sen\ 2x$ **c)** $y = cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ **d)** $y = sen\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$









a) → IV b) → III c) → I d) → II

10 Demuestra las siguientes identidades:

a) $\cos^4 x - \sin^4 x = 2\cos^2 x - 1$

b) $2tg\, x \cos^2 \frac{x}{2} - sen\, x = tg\, x$

a) $\cos^4 x - sen^4 x = (\cos^2 x + sen^2 x)(\cos^2 x - sen^2 x) = \cos^2 x - sen^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1$

b) $2tg\, x \cos^2 \frac{x}{2} - sen\, x = 2tg\, x \frac{1 + \cos x}{2} - sen\, x = tg\, x + tg\, x \cos x - sen\, x = tg\, x + \frac{sen\, x}{\cos x}\cos x - sen\, x = tg\, x$

11 Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $2sen\, x + \cos x = 1$

b) $2sen^2 \frac{x}{2} + \cos 2x = 0$

a) $2sen\, x + \cos x = 1 \to (2\, sen\, x)^2 = (1 - \cos x)^2 \to 4sen^2 x = 1 + \cos^2 x - 2\cos x \to$

$$\to 5\cos^2 x - 2\cos x - 3 = 0 \to \cos x = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{10} \begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos x = -3/5 \end{cases}$$

$\cos x = 1 \to x_1 = 0° + 360° \cdot k;\ k \in \mathbb{Z} \to$ Vale.

$$\cos x = -\frac{3}{5} \begin{cases} x_2 = 126° 52' 12'' + 360° \cdot k,\ k \in \mathbb{Z} \to \text{Vale.} \\ x_3 = 233° 7' 48'' \to \text{No vale.} \end{cases}$$

Hemos comprobado las soluciones en la ecuación dada.

b) $2sen^2 \frac{x}{2} + \cos 2x = 0 \to 2\,\frac{1 - \cos x}{2} + \cos^2 x - sen^2 x = 0 \to$

$$\to 1 - \cos x + \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 0 \to 2\cos^2 x - \cos x = 0 \to$$

$$\to \cos x(\cos x - 1) = 0 \to \begin{cases} \cos x_1 = 0 \to x = 90° + 360° \cdot k;\ x = 270° + 360° \cdot k \\ \cos x_3 = 1 \to x = 0° + 360° \cdot k \end{cases}$$

12 Dado el número complejo $z = 3_{60°}$, expresa en forma polar el conjugado, el opuesto y el inverso.

$\overline{z} = 3_{360° - 60°} = 3_{300°}$

$-z = 3_{60° + 180°} = 3_{240°}$

$\frac{1}{z} = \frac{1_{0°}}{3_{60°}} = \left(\frac{1}{3}\right)_{-60°} = \left(\frac{1}{3}\right)_{300°}$

13 Simplifica: $\dfrac{i^{10} - 2i^7}{2 + i^{33}}$

$i^{10} = i^4 \cdot i^4 \cdot i^2 = -1;\ i^7 = i^4 \cdot i^2 \cdot i = -i$

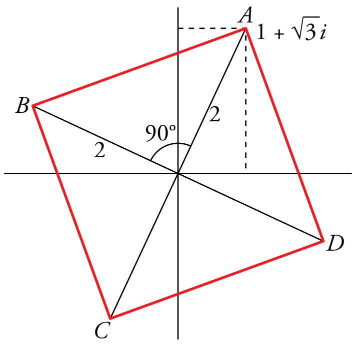
$i^{33} = (i^4)^8 \cdot i = i$

$$\frac{i^{10} - 2i^7}{2 + i^{33}} = \frac{-1 - 2(-i)}{2 + i} = \frac{-1 + 2i}{2 + i} = \frac{(-1 + 2i)(2 - i)}{(2 + i)(2 - i)} = \frac{-2 + i + 4i - 2i^2}{(2)^2 - (i)^2} = \frac{5i}{5} = i$$

14 Escribe una ecuación de segundo grado cuyas soluciones sean $-1 + \sqrt{3}i$ y $-1 - \sqrt{3}i$.

$[x - (-1 + \sqrt{3}i)][x - (-1 - \sqrt{3}i)] = 0 \to x^2 + 2x + 4 = 0$

15 **Un cuadrado cuyo centro es el origen de coordenadas tiene un vértice en el afijo del número complejo $1 + \sqrt{3}\,i$. Determina los otros vértices y la medida del lado del cuadrado.**



Hacemos giros de 90°. Para ello, multiplicamos por $1_{90°}$:

$A = 1 + \sqrt{3}\,i = 2_{60°}$ $\qquad B = 2_{60°} \cdot 1_{90°} = 2_{150°}$

$C = 2_{150°} \cdot 1_{90°} = 2_{240°}$ $\qquad D = 2_{240°} \cdot 1_{90°} = 2_{330°}$

$\overline{AB}^2 = 2^2 + 2^2 \to \overline{AB} = 2\sqrt{2}$ u

16 **Calcula a y b para que se verifique esta igualdad:**

$$\frac{a-2i}{3-i} = \frac{b-i}{5}$$

$$\frac{a-2i}{3-i} = \frac{b-i}{5} \to 5(a-2i) = (b-i)(3-i) \to 5a - 10i = 3b - bi - 3i + i^2 \to$$

$$\to 5a - 10i = 3b - 1 + (-b-3)\,i \to \begin{cases} 5a = 3b - 1 \\ -10 = -b - 3 \end{cases} \to a = 4,\ b = 7$$

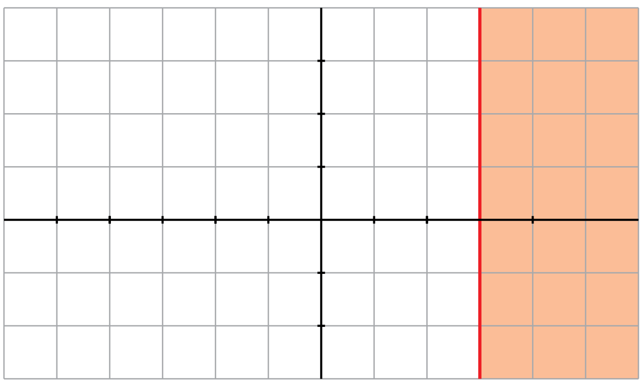
17 **Resuelve la ecuación $2z^2 + 8 = 0$.**

$2z^2 + 8 = 0 \to z^2 = -4 \to z = \pm\sqrt{-4} = \pm\,2i \to z_1 = 2i;\ z_2 = -2i$

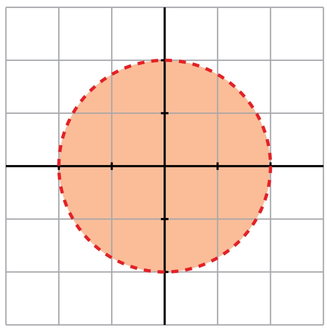
18 **Representa gráficamente:**

a) $Re(z) \geq 3$ $\qquad$ **b)** $|z| < 2$ $\qquad$ **c)** $z - \bar{z} = -4i$

a)



b)



c) Si $z = a + bi \to z - \overline{z} = a + bi - (a - bi) = 2bi$

$z - \overline{z} = -4i$

Por tanto: $2bi = -4i \to b = -2$