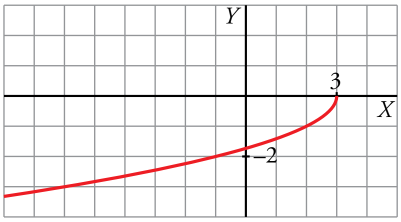
Autoevaluación

Página 332

1 **Observa la gráfica de la función $y = f(x)$ y a partir de ella responde:**



a) ¿Cuál es su dominio de definición? ¿Y su recorrido?

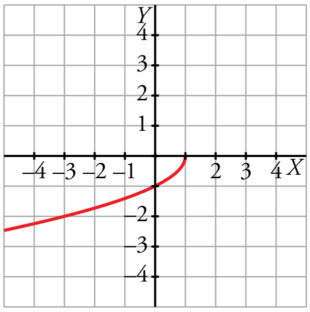
b) Representa gráficamente: $y = f(x + 2)$; $y = f(x) + 1$; $y = -f(x)$

c) Representa la función inversa de $f(x)$.

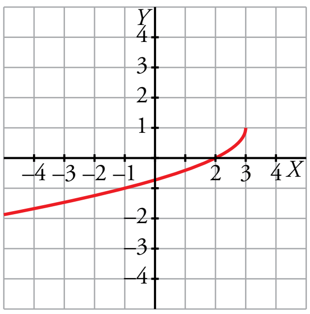
a) Su dominio es el intervalo $(-\infty, 3]$.

Su recorrido es $(-\infty, 0]$.

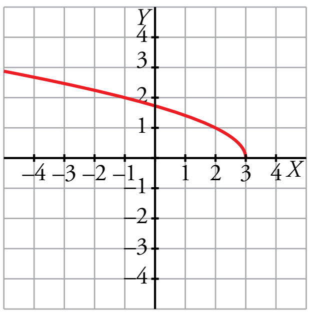
b) La gráfica de $f(x + 2)$ es la de $f(x)$ desplazada dos unidades a la izquierda.



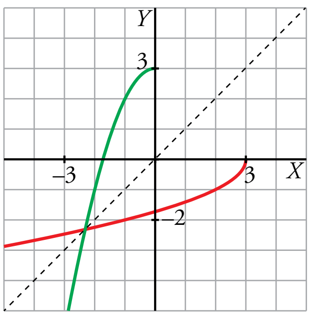
La gráfica de $f(x) + 1$ es la de $f(x)$ desplazada una unidad hacia arriba.



La gráfica de $-f(x)$ es la simétrica de $f(x)$ respecto del eje OX.



c) La gráfica de la función inversa de $f(x)$ es simétrica de la de $f(x)$ respecto a la recta $y = x$:



2 **Representa las funciones:**

a) $\boldsymbol{y = |x^2 + 2x - 3|}$

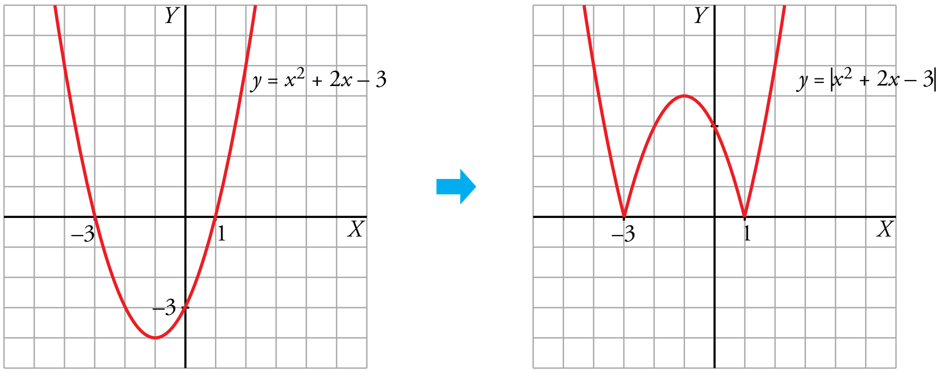
b) $\boldsymbol{y = log_2\,(x + 3)}$

a) $y = |x^2 + 2x - 3|$. Estudiamos la parábola $y = x^2 + 2x - 3$:

Cortes con los ejes: $x = 0,\ y = -3$; $y = 0 \to x^2 + 2x - 3 = 0$: $x = 1$, $x = -3$

Vértice: $x = \dfrac{-2}{2} = -1$; $y = (-1)^2 + 2(-1) - 3 = -4$

Su representación es:



Así, los valores positivos quedan igual, y para los negativos tomamos sus opuestos.

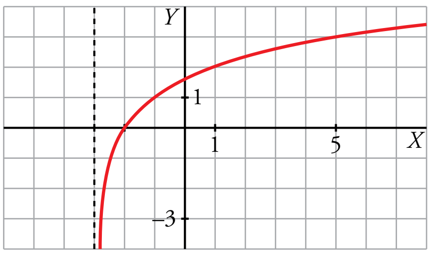
b) $y = log_2\,(x + 3) \to Dom = (-3, +\infty)$

Hallamos algunos puntos y vemos que:

x	–2	–1	1	5
y	0	1	2	3

$\lim\limits_{x \to -3^+} log_2\,(x + 3) = -\infty$

Su gráfica es:



3 **Un parque de atracciones está abierto al público entre las 10 y las 20 horas. El número de visitantes viene dado por la función** $\boldsymbol{N(t) = -at^2 + 680t + c}$**, donde** $\boldsymbol{t}$ **es la hora de visita. Sabiendo que a las 17 h se alcanza el máximo de 1 500 visitantes, halla** $\boldsymbol{a}$ **y** $\boldsymbol{c}$ **y representa la función.**

Como la gráfica de la función $N(t)$ es una parábola, el máximo se alcanza en su vértice, luego:

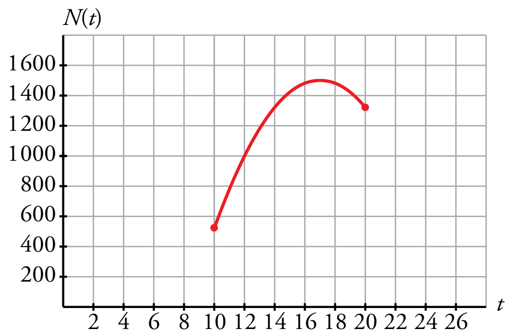
$$\frac{-680}{2 \cdot (-a)} = 17 \to a = \frac{680}{34} = 20 \to N(t) = -20t^2 + 680t + c$$

Como a las 17 h el parque tiene 1 500 visitantes, se tiene que:

$$1\,500 = -20 \cdot 17^2 + 680 \cdot 17 + c \to c = -4\,280$$

La función es $N(t) = -20t^2 + 680t - 4\,280$

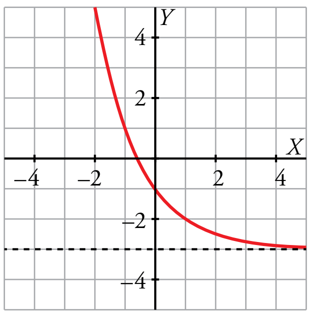
Para representar la función calculamos $N(10)$ y $N(20)$. El vértice y estos dos puntos son suficientes para construir la gráfica.



4 **Representa la función $y = 2^{1-x} - 3$ y halla su función inversa.**

$y = 2^{1-x} - 3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} - 3$

Por tanto, se trata de una función exponencial con base menor que 1. Su gráfica es como la de $\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ desplazada 1 unidad hacia la derecha y 3 unidades hacia abajo.



Hallamos la inversa de la función: $x = \left(\frac{1}{2}\right)^{y-1} - 3 \rightarrow x + 3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{y-1}$

Tomamos logaritmos: $log\,(x + 3) = (y - 1)\ log\,\frac{1}{2}$

$$y = \frac{log(x+3)}{log\frac{1}{2}} + 1 = f^{-1}(x)$$

5 **Una población de insectos crece según la función $y = 1 + 0{,}5 \cdot e^{0{,}4x}$ (x = tiempo, en días; y = número de insectos, en miles).**

a) ¿Cuál es la población inicial?

b) Calcula cuánto tarda en llegar a 10 000 insectos.

a) $x = 0 \rightarrow y = 1 + 0{,}5 \cdot e^{0} = 1{,}5 \rightarrow$ Población inicial: 1 500 insectos.

b) $y = 10 \rightarrow 10 = 1 + 0{,}5 \cdot e^{0{,}4x} \rightarrow \frac{9}{0{,}5} = e^{0{,}4x} \rightarrow 0{,}4x = ln\ 18 \rightarrow x = \frac{ln\,18}{0{,}4} = 7{,}23$

Tarda entre 7 y 8 días.

6 **A partir de las funciones $f(x) = e^x$; $g(x) = sen\ x$; $h(x) = \sqrt{x}$, hemos obtenido, por composición, las funciones:**

$$p(x) = sen\ \sqrt{x};\quad q(x) = e^{sen\ x};\quad r(x) = \sqrt{e^x}$$

Explica el procedimiento seguido.

$p(x) = sen\ \sqrt{x} \;\rightarrow\; p(x) = g[h(x)] \;\rightarrow\; p = g \circ h$

$q(x) = e^{sen\ x} \;\rightarrow\; q(x) = f[g(x)] \;\rightarrow\; q = f \circ g$

$r(x) = \sqrt{e^x} \;\rightarrow\; r(x) = h[f(x)] \;\rightarrow\; r = h \circ f$

7 **Calcula los límites siguientes:**

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x-5}{x^2+1}$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{1-x}$ **c)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{x^2-3x+2}$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x-5}{x^2+1} = 0$ porque el grado del numerador es menor que el del denominador.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{1-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e}{e^x} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{x^2-3x+2} = \left(\dfrac{0}{0}\right) \rightarrow$ Indeterminación.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-2x+1}{x^2-3x+2} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x-2} = 0$$

8 **En la función:**

$$f(x) = \begin{cases} 3x-b & \text{si } x < 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \\ -2x+9 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

a) Calcula b para que tenga límite en $x = 2$.

b) Después de hallar b, explica si f es continua en $x = 2$.

a) $f(x) = \begin{cases} 3x-b & \text{si } x < 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \\ -2x+9 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Para que tenga límite en $x = 2$, debe cumplirse: $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 3 \cdot 2 - b = 6 - b \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -2 \cdot 2 + 9 = 5 \end{array}\right\} \rightarrow 6 - b = 5 \rightarrow b = 1$$

b) Para que sea continua en $x = 2$, debe ser $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$.

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3 \cdot 2 - 1 = 5$

$f(2) = 3$

Como $f(2) \neq \lim\limits_{x \to 2} f(x)$, f no es continua en $x = 2$.

9 **Prueba, utilizando la definición, que la función derivada de $f(x)=\dfrac{3x-5}{2}$ es $f'(x)=\dfrac{3}{2}$.**

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$f(x)=\frac{3x-5}{2}$$

$$f(x+h)=\frac{3(x+h)-5}{2}$$

$$f(x+h)-f(x)=\frac{3x+3h-5-3x+5}{2}=\frac{3h}{2}$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{3h}{2}:h=\frac{3}{2}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$

10 **Halla la recta tangente a la curva $y=-x^2+5x$ que es paralela a la recta $x+y+3=0$.**

Pendiente de $x+y+3=0$: $m=-1$

El valor de la derivada en el punto de tangencia debe ser igual a –1.

$f(x)=-x^2+5x$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=-2x+5 \to -2x+5=-1 \to x=3 \\ f(3)=-3^2+5\cdot 3=6 \end{array}\right\} \to \text{Punto de tangencia: } P(3, 6)$$

Ecuación de la recta tangente buscada: $y=6-1(x-3) \to y=9-x$

11 **Halla los puntos singulares de $f(x)=-x^4+8x^2-5$. Con ayuda de las ramas infinitas, di si son máximos o mínimos y representa la función.**

$f(x)=-x^4+8x^2-5 \to f'(x)=-4x^3+16x \to f'(x)=0 \to -4x^3+16x=0 \to$

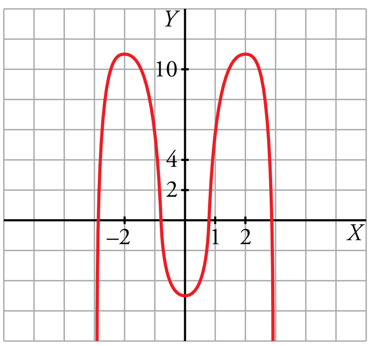
$$\to 4x(-x^2+4)=0 \begin{cases} x=0 \to f(0)=-5 \\ x=2 \to f(2)=-16+32-5=11 \\ x=-2 \to f(-2)=-16+32-5=11 \end{cases}$$

Los puntos singulares son (0, –5), (2, 11) y (–2, 11).

$$\text{Ramas infinitas: } \begin{cases} \lim_{x\to +\infty}(-x^4+8x^2-5)=-\infty \\ \lim_{x\to -\infty}(-x^4+8x^2-5)=-\infty \end{cases}$$

Máximos: (2, 11) y (–2, 11)

Mínimo: (0, –5)



12 **Halla la función derivada de las siguientes funciones:**

a) $f(x)=\sqrt{tg\,x}$ **b)** $f(x)=\dfrac{ln\,x}{x}$ **c)** $f(x)=arc\;tg\,x^2$ **d)** $f(x)=e^{\pi}$

e) $f(x)=\dfrac{arc\;sen\,x}{2}$ **f)** $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}$ **g)** $f(x)=ln\,\sqrt[3]{(x\cdot e)^2}$ **h)** $f(x)=ln\,\dfrac{2x+3}{x^2}$

a) $f'(x)=\dfrac{1+tg^2\,x}{2\sqrt{tg\,x}}$

b) $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-ln\,x}{x^2}=\dfrac{1-ln\,x}{x^2}$

c) $f'(x)=\dfrac{2x}{1+x^4}$

d) $f'(x)=0$

e) $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$

f) $f'(x)=\dfrac{1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}=\dfrac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\,\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

g) $f'(x)=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{x}\cdot e\right)=\dfrac{2e}{3x}$

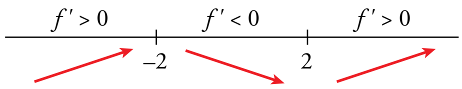
h) $f'(x)=\dfrac{2}{2x+3}-\dfrac{2}{x}=\dfrac{-2x-6}{x(2x+3)}$

13 **Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de las funciones siguientes:**

a) $y=x^3-12x$ **b)** $y=\dfrac{x^2-4}{x}$

a) $f(x)=x^3-12x \;\rightarrow\; f'(x)=3x^2-12;\;\; 3x^2-12=0 \;\begin{cases} x=2 \\ x=-2 \end{cases}$

Estudiamos el signo de f' para saber dónde crece y dónde decrece la función:



f crece en $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$. f decrece en $(-2, 2)$.

b) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x} \;\rightarrow\; f'(x)=\dfrac{2x\cdot x-x^2+4}{x^2}=\dfrac{x^2+4}{x^2}$

$f'(x)=0 \;\rightarrow\; \dfrac{x^2+4}{x^2}=0$ No tiene solución.

f' es positiva para cualquier valor de x. f es creciente en todo su dominio: $\mathbb{R}-\{0\}$.

14 **En la función** $y=\dfrac{x^2}{x^2-4x+3}$ **estudia:**

a) Las asíntotas y la posición de la curva con respecto a ellas.

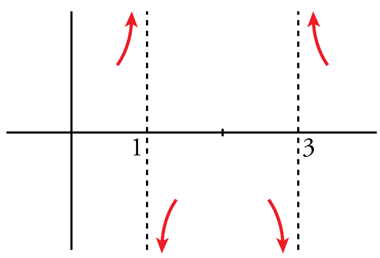
b) Los máximos y los mínimos relativos.

c) Representa su gráfica.

a) • Asíntotas verticales: $x^2-4x+3=0 \;\rightarrow\; x=1,\; x=3$

Posición de $x=1$ $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2}{x^2-4x+3}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2}{x^2-4x+3}=-\infty \end{cases}$

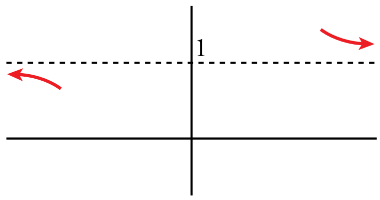
Posición de $x=3$ $\begin{cases} x\to 3^- \;\; f(x)\to -\infty \\ x\to 3^+ \;\; f(x)\to +\infty \end{cases}$



- Asíntota horizontal:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3} = 1 \;\to\; y = 1$$

Posición: $\begin{cases} x \to +\infty & f(x) > 1 \\ x \to -\infty & f(x) < 1 \end{cases}$



b) Máximos y mínimos:

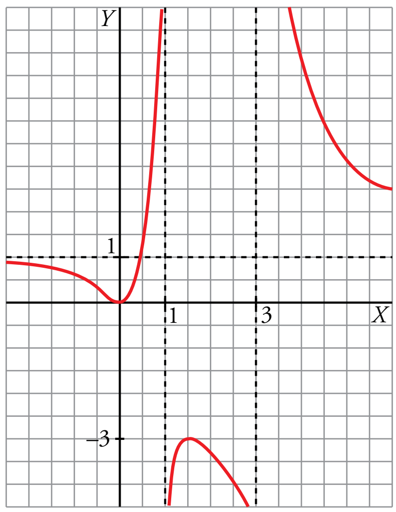
$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 4x + 3) - x^2(2x - 4)}{(x^2 - 4x + 3)^2} = \frac{-4x^2 + 6x}{(x^2 - 4x + 3)^2}$$

$f'(x) = 0 \;\to\; -4x^2 + 6x = 0 \;\begin{cases} x = 0 \\ x = 3/2 \end{cases}$

$f(0) = 0 \;\to\; P(0, 0)$ es un mínimo relativo.

$f\left(\frac{3}{2}\right) = -3 \;\to\; Q\left(\frac{3}{2}, -3\right)$ es un máximo relativo.

c)



15 **¿Cuál de estas funciones tiene asíntota oblicua?**

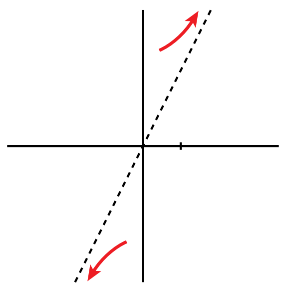
a) $y = \dfrac{2x^2 - x^3}{x - 1}$ **b)** $y = 1 + \dfrac{3}{x}$ **c)** $y = \dfrac{4 + 2x^2}{x}$

Hállala y sitúa la curva con respecto a ella.

Tiene asíntota oblicua $y = \dfrac{4 + 2x^2}{x} = \dfrac{4}{x} + 2x$

La asíntota es $y = 2x$.

Posición: $\begin{cases} x \to +\infty & \text{curva} > \text{asíntota} \\ x \to -\infty & \text{curva} < \text{asíntota} \end{cases}$



16 **Calcula a y b de modo que la función $y = x^3 + ax + b$ tenga un punto singular en (2, 1).**

Si $y = x^3 + ax + b$ tiene un punto singular en (2, 1), la curva pasa por ese punto y su derivada es igual a 0 en él.

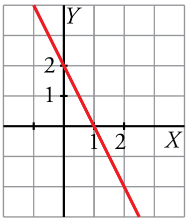
$(2, 1) \in (x, f(x)) \;\to\; 1 = 2^3 + a \cdot 2 + b \;\to\; 2a + b = -7$

$f'(x) = 0$ en $x = 2 \;\to\; f'(x) = 3x^2 + a \;\to\; 0 = 3 \cdot 2^2 + a \;\to\; 12 + a = 0$

$\begin{cases} 2a + b = -7 \\ 12 + a = 0 \end{cases} \;\to\; a = -12, \; b = 17$

La función es $y = x^3 - 12x + 17$.

17 **Esta es la gráfica de f', la función derivada de f.**



a) Di para qué valores de x es f creciente y para cuáles f es decreciente.

b) ¿Tiene f algún punto de tangente horizontal? Justifícalo.

a) f es creciente cuando $f' > 0 \rightarrow f$ crece si $x < 1$ y decrece si $x > 1$.

b) Tiene un punto de tangente horizontal en $x = 1$, porque en ese punto $f' = 0$.

18 **Estudia la continuidad y la derivabilidad de esta función:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & \text{si } x \le 1 \\ x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Llamamos $f_1(x) = x^2 + 2x - 1$ y $f_2(x) = x + 1$

Ambas funciones son continuas.

$$\left.\begin{array}{l} f_1(1) = 1^2 + 2 \cdot 1 - 1 = 2 \\ f_2(1) = 1 + 1 = 2 \end{array}\right\} \text{Como coinciden, la función es continua en } x = 1.$$

Por tanto, la función es continua en todo $\mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{l} f'_1(x) = 2x + 2 \rightarrow f'_1(1) = 4 \\ f'_2(x) = 1 \rightarrow f'_2(1) = 1 \end{array}\right\} \text{Como son distintos, la función no es derivable en } x = 1.$$

La función derivada es $f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

19 **Calcula el siguiente límite:**

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x + e) - e^x}{\operatorname{sen} x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x + e) - e^x}{\operatorname{sen} x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x + e} - e^x}{\cos x} = \frac{1}{e} - 1$$

20 **De todos los rectángulos de 60 m^2 de área, ¿cuáles son las dimensiones del que tiene el menor perímetro?**

Supongamos que x e y son la base y la altura del rectángulo, respectivamente.

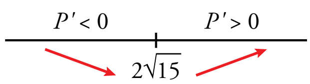
Como el área es igual a 60 m^2, se tiene que $xy = 60 \rightarrow y = \frac{60}{x}$

El perímetro del rectángulo es $P = 2x + 2y = 2x + 2 \cdot \frac{60}{x} = 2x + \frac{120}{x}$

Buscamos el rectángulo de perímetro mínimo:

$P' = 2 - \frac{120}{x^2} \rightarrow 2 - \frac{120}{x^2} = 0 \rightarrow x^2 = 60 \rightarrow$ La única solución válida es $x = 2\sqrt{15}$.

Comprobamos que el valor obtenido es un mínimo de la función P:



Por tanto, las medidas son $x = 2\sqrt{15}$ m, $y = \frac{60}{2\sqrt{15}} = 2\sqrt{15}$ m y el perímetro mínimo es $8\sqrt{15}$ m.