Demostraciones de las propiedades de los números combinatorios

Demostración conjuntista (Pensando en el significado de los conjuntos)

En el libro vienen demostradas las dos primeras propiedades teniendo en cuenta el significado conjuntista de las combinaciones. Vamos a hacerlo de la misma forma para la tercera, analizando el siguiente ejemplo curioso:

Ana y Ramón son una pareja de recién casados. Tienen 7 objetos de adorno y una vitrina en la que caben 4 de ellos.

El número de posibles elecciones es $\binom{7}{4}$.

Pero en el momento de hacer la elección surge una pequeña diferencia de criterios.

¿Cuántas son las posibilidades que admite Ana? Tantas como formas de seleccionar los 3 objetos que acompañarán al retrato de su madre, es decir, $\binom{6}{3}$.

¿Cuántas son las posibilidades que admite Ramón? Tantas como formas de seleccionar 4 objetos de entre los 6 que no son el retrato de su suegra, es decir, $\binom{6}{4}$.

Pero fíjate que, necesariamente, si seleccionan 4 objetos, uno de los dos se saldrá con la suya. Es decir, que cualquier posible selección o es de las que quiere Ana o es de las que quiere Ramón. Por tanto:

$$\binom{6}{3}+\binom{6}{4}=\binom{7}{4}$$

Si en lugar de 7 objetos tuvieran m, y en la vitrina en vez de 4 cupiesen n, el mismo razonamiento que hemos seguido en el ejemplo nos llevaría a la demostración de la propiedad III.

Demostración algebraica

Vamos a aplicar la fórmula $\binom{m}{n}=\dfrac{m!}{n!\,(m-n)!}$.

I. $$\binom{m}{0}=\frac{m!}{0!\,(m-0)!}=\frac{m!}{m!}=1$$

$$\binom{m}{m}=\frac{m!}{m!\,(m-m)!}=\frac{m!}{m!\,0!}=\frac{m!}{m!}=1$$

II. $$\binom{m}{n}=\frac{m!}{n!\,(m-n)!}=\frac{m!}{[m-(m-n)]!\,(m-n)!}=\frac{m!}{(m-n)!\,[m-(m-n)]!}=\binom{m}{m-n}$$

III. $$\binom{m-1}{n-1}+\binom{m-1}{n}=\frac{(m-1)!}{(n-1)!\,(m-n)!}+\frac{(m-1)!}{n!\,(m-n-1)!}\overset{(*)}{=}\frac{(m-1)!\cdot n}{n!\,(m-n)!}+\frac{(m-1)!\cdot(m-n)}{n!\,(m-n)!}=$$

$$=\frac{(m-1)!}{n!\,(m-n)!}(n+m-n)=\frac{(m-1)!\cdot m}{n!\,(m-n)!}=\frac{m!}{n!\,(m-n)!}=\binom{m}{n}$$

(∗) Ponemos denominador común $n!(m-n)!$