Ampliación teórica. Demostración de las propiedades de los logaritmos

Propiedad 1

Dos números distintos tienen logaritmos distintos. Es decir:

Si $P \neq Q$, entonces $\log_a P \neq \log_a Q$.

Además, si $a > 1$ y $P < Q$, $\log_a P < \log_a Q$.

Demostración

Hacemos:

$$\left.\begin{array}{l} \log_a P = p \longrightarrow P = a^p \\ \log_a Q = q \longrightarrow Q = a^q \end{array}\right\} \text{Si } P \neq Q \rightarrow a^p \neq a^q \rightarrow p \neq q \rightarrow \log_a P \neq \log_a Q$$

Si tenemos en cuenta que la función $y = \log_a x$ es creciente para $a > 1$, es obvia tanto esta propiedad como la siguiente:

Si $P < Q \rightarrow \log_a P < \log_a Q$

Propiedad 4

El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores:

$$\log_a (P \cdot Q) = \log_a P + \log_a Q$$

☛ ***Indicación:***

$$\left.\begin{array}{l} \log_a P = p \longrightarrow P = a^p \\ \log_a Q = q \longrightarrow Q = a^q \end{array}\right\} \Rightarrow P \cdot Q = a^{p+q}$$

Toma logaritmos de base a en esta igualdad y sustituye p y q. ♦

Demostración

$$\log_a (P \cdot Q) = \log_a a^{p+q} \rightarrow \log_a (P \cdot Q) = p + q \rightarrow \log_a (P \cdot Q) = \log_a P + \log_a Q$$

Propiedad 5

El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor:

$$\log_a \left(\frac{P}{Q}\right) = \log_a P - \log_a Q$$

Demostración

Hacemos:

$$\left.\begin{array}{l} \log_a P = p \rightarrow P = a^p \\ \\ \log_a Q = q \rightarrow Q = a^q \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Dividiendo} \rightarrow \dfrac{P}{Q} = \dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q} \\ \\ \log_a \dfrac{P}{Q} = \log_a a^{p-q} \rightarrow \log_a \dfrac{P}{Q} = p - q \rightarrow \log_a \dfrac{P}{Q} = \log_a P - \log_a Q \end{array}$$

Ampliación teórica. Demostración de las propiedades de los logaritmos

Propiedad 6

El logaritmo de una potencia es igual al exponente multiplicado por el logaritmo de la base:

$$\log_a P^n = n \cdot \log_a P$$

Indicación

Haz $\log_a P = p \rightarrow a^p = P$, *eleva a* n *los dos miembros de la igualdad y toma* $\log_a$ ♦

Demostración

Hacemos: $\log_a P = p \rightarrow a^p = P$

Elevando a n:

$$a^{np} = P^n \rightarrow \log_a a^{np} = \log_a P^n$$

$$np = \log_a P^n \rightarrow n \log_a P = \log_a P^n \rightarrow \log_a P^n = n \log_a P$$

Propiedad 7

El logaritmo de una raíz es igual al logaritmo del radicando dividido por el índice de la raíz:

$$\log_a \sqrt[n]{P} = \frac{\log_a P}{n}$$

Indicación

Recuerda que $\sqrt[n]{P} = p^{1/n}$ *y repite el mismo proceso que en la propiedad anterior.* ♦

Demostración

Hacemos: $\log_a \sqrt[n]{P} = \log_a P^{1/n} \overset{(*)}{=} \frac{1}{n} \log_a P = \frac{\log_a P}{n}$

(*) Propiedad anterior.

Propiedad 8

$$\log_a P = \frac{\log P}{\log a} \qquad \textit{Recuerda: } \log P = \log_{10} P$$

Indicación

Haz $\log_a P = p \rightarrow a^p = P$. *Toma logaritmos decimales y luego despeja* p. ♦

Demostración

$$a^p = P \rightarrow \log a^p = \log P \rightarrow p \log a = \log P \rightarrow p = \frac{\log P}{\log Q}$$

Así, $\log_a P = \dfrac{\log P}{\log a}$.