

Demostración. Suma de los n primeros cuadrados y suma de los n primeros cubos

■ DEMOSTRACIÓN DE

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Haremos la demostración aplicando el método de **inducción completa**. Este método consiste en:

- Probar que la igualdad es cierta para $n = 1$ (y, si se quiere, para $n = 2, n = 3, \dots$).
- Probar que, si la igualdad fuera cierta para un n , lo sería para el siguiente, $n + 1$.

Pues bien, apliquemos este método a nuestra demostración:

- Para $n = 1$:

$$\left. \begin{array}{l} \text{PRIMER MIEMBRO: } 1^2 = 1 \\ \text{SEGUNDO MIEMBRO: } \frac{1(1+1)(2+1)}{6} = 1 \end{array} \right\} \text{Coinciden}$$

Por tanto, la igualdad se cumple para $n = 1$.

- Suponemos que es cierta para un valor de n y, a partir de ahí, debemos deducir que es cierta para el siguiente, $n + 1$:

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 &= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + (n+1)^2 = \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = (n+1) \left[\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1) \right] = \\ &= (n+1) \left(\frac{2n^2 + n}{6} + \frac{6n + 6}{6} \right) = (n+1) \frac{2n^2 + 7n + 6}{6} = \\ &= (n+1) \frac{(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1) \cdot [(n+1)+1] \cdot [2(n+1)+1]}{6} \end{aligned}$$

La expresión final es el segundo miembro de la igualdad que queremos demostrar, pero cambiando la n por $n + 1$. Por tanto, se cumple para $n + 1$.

Demostración. Suma de los n primeros cuadrados y suma de los n primeros cubos

■ DEMOSTRACIÓN DE

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Lo haremos, también, por inducción completa:

- Para $n = 1$:

$$\left. \begin{array}{l} \text{PRIMER MIEMBRO: } 1^3 = 1 \\ \text{SEGUNDO MIEMBRO: } \frac{1^2 \cdot 2^2}{4} = 1 \end{array} \right\} \text{Coinciden}$$

La igualdad es cierta para $n = 1$.

- La suponemos cierta para n . ¿Lo será para $n + 1$?

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 &= (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) + (n+1)^3 = \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = (n+1)^2 \left[\frac{n^2}{4} + (n+1) \right] = \\ &= (n+1)^2 \frac{n^2 + 4n + 4}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \frac{(n+1)^2[(n+1)+1]^2}{4} \end{aligned}$$

Y este es el segundo miembro de la igualdad, pero cambiando n por $n + 1$.

■ MÉTODO DE INDUCCIÓN COMPLETA

Este método, que ya hemos explicado al principio, se usa para demostrar igualdades en las que intervienen números naturales, descritos por la variable n . Su lógica consiste en lo siguiente:

Si la propiedad $P(n)$ es cierta para $n = 1$ y, además,
si fuera cierta para n lo sería para $n + 1$, entonces:

