

Resoluciones

1 Considera los polinomios $A(x) = x^3 + 2x^2 + x$ y $B(x) = x^3 + 3x^2 + 2x$.

Halla el mín.c.m.[$A(x)$, $B(x)$] y el máx.c.d.[$A(x)$, $B(x)$].

Resolución

$$A(x) = x^3 + 2x^2 + x = x(x^2 + 2x + 1) = x(x + 1)^2$$

$$B(x) = x^3 + 3x^2 + 2x = x(x^2 + 3x + 2) = x(x + 1)(x + 2)$$

$$\text{mín.c.m.}[A(x), B(x)] = x(x + 1)^2(x + 2)$$

$$\text{máx.c.d.}[A(x), B(x)] = x(x + 1)$$

2 Opera y simplifica el resultado:

$$\left(\frac{x+1}{x-2} - \frac{x-2}{x+1} \right) : \left(\frac{-5}{x+1} + 2 \right)$$

Resolución

$$\begin{aligned} \left(\frac{x+1}{x-2} - \frac{x-2}{x+1} \right) : \left(\frac{-5}{x+1} + 2 \right) &= \frac{(x+1)^2 - (x-2)^2}{(x-2)(x+1)} : \frac{2x-3}{x+1} = \frac{(x+1)^2 - (x-2)^2}{(x-2)(2x-3)} = \\ &= \frac{6x-3}{(x-2)(2x-3)} = \frac{3(2x-1)}{(x-2)(2x-3)} \end{aligned}$$

3 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $0,16x^2 + 0,5x + 0,3 = 0$

b) $\frac{-x^4 + 1}{3} + \frac{x^4 - 2}{2} = \frac{x^2 - 2}{6}$

c) $\sqrt{7+x} = \sqrt{-2-x} + 1$

d) $\frac{x}{x-3} - \frac{x+3}{x+1} = \frac{x^2}{(x+1)(x-3)}$

Resolución

a) $0,16x^2 + 0,5x + 0,3 = 0$

$$\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3} = 0 \rightarrow x^2 + 3x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} = \begin{cases} -1 \\ -2 \end{cases}$$

Soluciones: $x_1 = -1$; $x_2 = -2$

b) $\frac{-x^4 + 1}{3} + \frac{x^4 - 2}{2} = \frac{x^2 - 2}{6}$

$$2(-x^4 + 1) + 3(x^4 - 2) = x^2 - 2 \rightarrow -2x^4 + 2 + 3x^4 - 6 - x^2 + 2 = 0 \rightarrow x^4 - x^2 - 2 = 0$$

Hacemos el cambio $x^4 = y^2$:

$$y^2 - y - 2 = 0 \rightarrow y = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases} \leftarrow \text{no vale}$$

$$y = 2 \rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

Soluciones: $x_1 = \sqrt{2}$; $x_2 = -\sqrt{2}$

Resoluciones

c) $\sqrt{7+x} = \sqrt{-2-x} + 1$

Elevamos al cuadrado ambos miembros:

$$7+x = (-2-x) + 1 + 2\sqrt{-2-x} \rightarrow 8+2x = 2\sqrt{-2-x}$$

Volvemos a elevar al cuadrado:

$$64 + 4x^2 + 32x = 4(-2-x) \rightarrow 4x^2 + 36x + 72 = 0 \rightarrow x^2 + 9x + 18 = 0$$

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{81-72}}{2} = \frac{-9 \pm 3}{2} = \begin{cases} -3 \\ -6 \end{cases}$$

Comprobamos las soluciones sobre la ecuación inicial:

$$x = -3 \rightarrow \sqrt{7-3} = \sqrt{-2+3} + 1 \rightarrow 2 = 2. \text{ Solución válida.}$$

$$x = -6 \rightarrow \sqrt{7-6} = \sqrt{-2+6} + 1 \rightarrow 1 \neq 3. \text{ Solución no válida.}$$

Solución: $x = -3$

d) $\frac{x}{x-3} - \frac{x+3}{x+1} = \frac{x^2}{(x+1)(x-3)}$

$$x(x+1) - (x+3)(x-3) = x^2 \rightarrow x^2 + x - x^2 + 9 = x^2 \rightarrow x^2 - x - 9 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+36}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{37}}{2}$$

Soluciones: $x_1 = \frac{1 + \sqrt{37}}{2}$; $x_2 = \frac{1 - \sqrt{37}}{2}$

4 Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales y logarítmicas:

a) $3^{x^2} \cdot 3^{-2} = 9$

b) $5^x \cdot 3^x = 10$

c) $\ln x + 1 = 2 \ln x$

Resolución

a) $3^{x^2} \cdot 3^{-2} = 9$

$$3^{x^2-2} = 3^2 \rightarrow x^2 - 2 = 2 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$$

Soluciones: $x_1 = 2$, $x_2 = -2$

b) $5^x \cdot 3^x = 10$

$$(5 \cdot 3)^x = 10 \rightarrow 15^x = 10 \rightarrow x \log 15 = \log 10 \rightarrow x \log 15 = 1 \rightarrow x = \frac{1}{\log 15} \approx \frac{1}{1,176} \approx 0,85$$

Solución: $x \approx 0,85$

c) $\ln x + 1 = 2 \ln x$

$$\ln x + \ln e = \ln x^2 \rightarrow \ln(x \cdot e) = \ln x^2 \rightarrow x \cdot e = x^2 \rightarrow e = x$$

Solución: $x = e$

Resoluciones

5 Resuelve estos sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} xy = -2 \\ 3x + 2y = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \sqrt{-2x} + y = -1 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \log_3 x - \log_3 y = -2 \\ \log_3 x + \log_3 y = 2 \end{cases}$

Resolución

a) $\begin{cases} xy = -2 \\ 3x + 2y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{2}{x} \\ 3x + 2\left(-\frac{2}{x}\right) = -1 \rightarrow 3x - \frac{4}{x} + 1 = 0 \end{cases}$

$$3x^2 - 4 + x = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{6} = \frac{-1 \pm 7}{6} = \begin{cases} -\frac{4}{3} \\ 1 \end{cases}$$

Si $x = -\frac{4}{3}$, $y = \frac{3}{2}$

Si $x = 1$, $y = -2$

Soluciones: $x_1 = -\frac{4}{3}$, $y_1 = \frac{3}{2}$; $x_2 = 1$, $y_2 = -2$

b) $\begin{cases} \sqrt{-2x} + y = -1 \\ x - 2y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{-2x} = -1 - y \\ x = 4 + 2y \end{cases}$

$\sqrt{-8 - 4y} = -1 - y$. Elevamos al cuadrado: $-8 - 4y = y^2 + 2y + 1 \rightarrow y^2 + 6y + 9 = 0$

$$y = \frac{-6 \pm \sqrt{36 \pm 36}}{2} = -3$$

Si $y = -3$, $x = 4 - 6 = -2$

Solución: $x = -2$, $y = -3$

c) $\begin{cases} \log_3 x - \log_3 y = -2 \\ \log_3 x + \log_3 y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_3 \left(\frac{x}{y}\right) = -2 \rightarrow \frac{x}{y} = 3^{-2} \rightarrow 9x = y \\ \log_3 (x \cdot y) = 2 \rightarrow x \cdot y = 3^2 \rightarrow x \cdot y = 9 \end{cases}$

$x \cdot 9x = 9 \rightarrow 9x^2 = 9 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$

La solución $x = -1$ no es válida.

Solución: $x_1 = 1$, $y_1 = 9$

6 Resuelve utilizando el método de Gauss:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + z = 1 \\ 3x + 2y - z = 3 \end{cases}$$

Resolución

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + z = 1 \\ 3x + 2y - z = 3 \end{cases} \xrightarrow{\begin{matrix} 1.^a \\ 2.^a - 1.^a \\ 3.^a - 3 \cdot 2.^a \end{matrix}} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y = 1 \\ -4y - 4z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 + 1 = 0 \\ 4z = -4 \rightarrow z = -1 \end{cases}$$

Solución: $x = 0$, $y = 1$, $z = -1$

Resoluciones

7 Resuelve:

a) $x(x^2 + 1)(x - 1) \geq 0$

b) $\begin{cases} 2x + 1 \geq 7 \\ x + 1 \leq 8 \end{cases}$

Resolución

a) $x(x^2 + 1)(x - 1) \geq 0$

$x^2 + 1 \geq 0$ para cualquier x

$$x(x^2 + 1)(x - 1) \geq 0 \text{ si } \begin{cases} x \geq 0 \\ y \\ x - 1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x \leq 0 \\ y \\ x - 1 \leq 0 \rightarrow x \leq 1 \end{cases}$$

Solución: $x \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$

b) $\begin{cases} 2x + 1 \geq 7 \\ x + 1 \leq 8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x \geq 6 \\ x \leq 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq 7 \end{cases}$

Solución: $x \in [3, 7]$

8 Tres empresas aportan 2, 3 y 5 millones de euros para la comercialización de un nuevo avión. A los 5 años reparten beneficios, correspondiéndole a la tercera 189 000 € más que a la segunda. ¿Cuál fue la cantidad repartida?

Resolución

Cantidad repartida $\rightarrow x$

El reparto debe ser proporcional a lo invertido (invierten, en total, 10 millones).

Al primero le corresponden $\frac{x}{10} \cdot 2$

Al segundo le corresponden $\frac{x}{10} \cdot 3$

Al tercero le corresponden $\frac{x}{10} \cdot 5 = \frac{x}{10} \cdot 3 + 189\,000$

$$\frac{x}{2} = \frac{3x}{10} + 189\,000 \rightarrow 5x = 3x + 1\,890\,000 \rightarrow 2x = 1\,890\,000 \rightarrow x = 945\,000 \text{ €}$$

Solución: Se reparten 945 000 €.