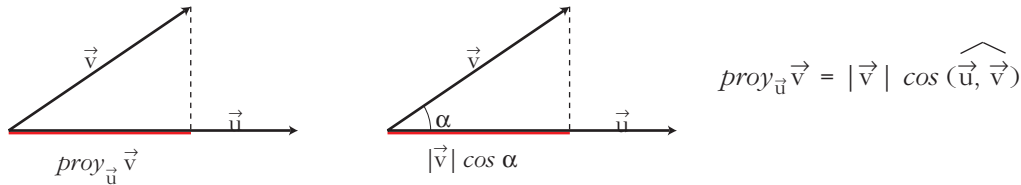


Demostración de algunas propiedades del producto escalar

Vamos a demostrar las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva del producto escalar.

Para demostrar las dos últimas, es necesario conocer el concepto de **proyección de un vector sobre otro**. Utilizaremos la fórmula siguiente:



■ Propiedad conmutativa del producto escalar

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

Demostración

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}) \stackrel{(*)}{=} |\vec{v}| |\vec{u}| \cos(\widehat{(\vec{v}, \vec{u})}) = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

(*) pues $\cos \alpha = \cos(-\alpha)$

■ Propiedad asociativa del producto escalar

$$\lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v}$$

Demostración

$$\begin{aligned} \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}) &= \lambda[|\vec{u}| |\vec{v}| \cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})})] = \lambda[|\vec{u}| \cdot proy_{\vec{u}} \vec{v}] \\ (\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} &= |\lambda \vec{u}| |\vec{v}| \cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}) = (\lambda |\vec{u}|) |\vec{v}| \cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}) = \lambda[|\vec{u}| \cdot proy_{\vec{u}} \vec{v}] \end{aligned}$$

La igualdad $\lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v}$ queda demostrada.

■ Propiedad distributiva del producto escalar

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

Demostración

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) &= |\vec{u}| |\vec{v} + \vec{w}| \cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v} + \vec{w})}) = |\vec{u}| \cdot proy_{\vec{u}}(\vec{v} + \vec{w}) \\ \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} &= |\vec{u}| |\vec{v}| \cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}) + |\vec{u}| |\vec{w}| \cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{w})}) = |\vec{u}| [|\vec{v}| \cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}) + |\vec{w}| \cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{w})})] = \\ &= |\vec{u}| \cdot [proy_{\vec{u}} \vec{v} + proy_{\vec{u}} \vec{w}] = |\vec{u}| \cdot proy_{\vec{u}}(\vec{v} + \vec{w}) \end{aligned}$$

Así, la igualdad $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ queda demostrada.

