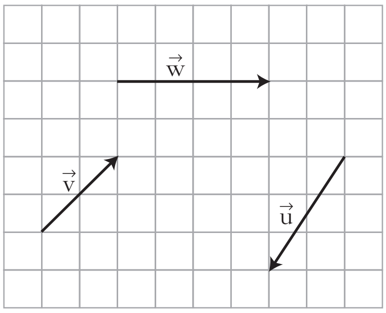
Autoevaluación ampliada

Resoluciones

1 **Considera los vectores representados en la siguiente figura:**



Representa:

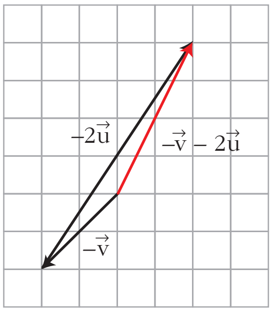
a) $-\vec{v} - 2\vec{u}$

b) $\vec{v} + 3\vec{w}$

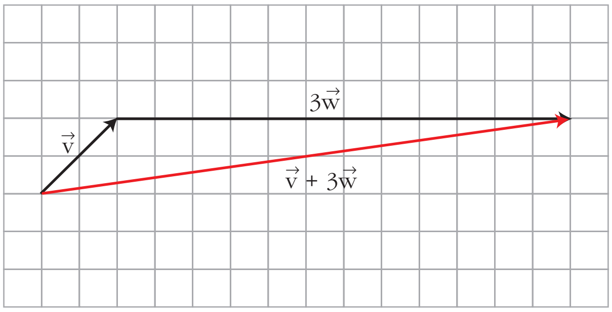
c) $-\vec{w} + 2\vec{v} + \vec{u}$

Resolución

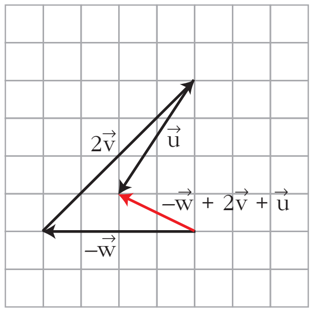
a)



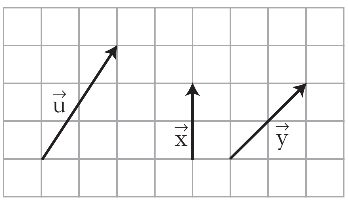
b)



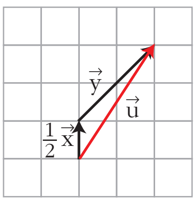
c)



2 **Dibuja el vector $\vec{u}$ como combinación lineal de los vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$. ¿Cuáles son las coordenadas de $\vec{u}$ respecto a la base formada por $\vec{x}$ e $\vec{y}$?**



Resolución



$$\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{x} + \vec{y}$$

$$\vec{u}\left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

Resoluciones

3 **Se consideran los vectores $\vec{u}(0, -4)$, $\vec{v}(-1, 3)$ y $\vec{w}(1, -6)$.**

a) Calcula las coordenadas de estos vectores:

$$2\vec{v} + \frac{3}{4}\vec{u} \qquad\qquad -\vec{v} - 2\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{w}$$

b) Expresa $\vec{w}$ como combinación lineal de los otros dos.

Resolución

a) $2\vec{v} + \frac{3}{4}\vec{u} = 2(-1, 3) + \frac{3}{4}(0, -4) = (-2, 6) + (0, -3) = (-2, 3)$

$$-\vec{v} - 2\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{w} = -(-1, 3) - 2(0, -4) + \frac{2}{3}(1, -6) =$$

$$= (1, -3) + (0, 8) + \left(\frac{2}{3}, -4\right) = \left(\frac{5}{3}, 1\right)$$

b) $\vec{w} = k\vec{u} + s\vec{v}$

$(1, -6) = k(0, -4) + s(-1, 3)$

$$\left.\begin{array}{l} 1 = -s \\ -6 = -4k + 3s \end{array}\right\} \begin{array}{l} s = -1 \\ -6 = -4k - 3 \ \rightarrow \ k = 3/4 \end{array}$$

Por tanto: $\vec{w} = \frac{3}{4}(0, -4) - (-1, 3) = \frac{3}{4}\vec{u} - \vec{v}$

4 **De tres vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ se sabe que $\vec{w} = \frac{1}{2}\vec{u} - 3\vec{v}$. Expresa $\vec{u}$ como combinación lineal de $\vec{v}$ y $\vec{w}$.**

Resolución

$\vec{w} = \frac{1}{2}\vec{u} - 3\vec{v} \ \rightarrow \ 2\vec{w} = \vec{u} - 6\vec{v} \ \rightarrow \ \vec{u} = 6\vec{v} + 2\vec{w}$

5 **Los módulos de dos vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$, que forman un ángulo de 60°, son $|\vec{v}| = 2$ y $|\vec{w}| = 5$. Calcula:**

a) $3\vec{w} \cdot (-2\vec{v})$

b) $\vec{v} \cdot (\vec{w} + \vec{v})$

c) $proy_{\vec{v}}(\vec{v} + \vec{w})$

Resolución

a) $3\vec{w} \cdot (-2\vec{v}) = -6(\vec{w} \cdot \vec{v}) = -6(|\vec{w}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos 60°) = -6\left(5 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}\right) = -30$

b) $\vec{v} \cdot (\vec{w} + \vec{v}) = \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos 60° + |\vec{v}|^2 = 2 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} + 4 = 9$

c) $proy_{\vec{v}}(\vec{v} + \vec{w}) = \dfrac{\vec{v} \cdot (\vec{v} + \vec{w})}{|\vec{v}|} = \dfrac{9}{2}$

Resoluciones

6 **Las coordenadas de dos vectores son, respecto a una base ortonormal, $\vec{u}\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right)$ y $\vec{v}\left(2, -\frac{3}{2}\right)$. Calcula:**

a) El producto escalar de ambos vectores.

b) El módulo de cada uno.

c) El ángulo que forman.

Resolución

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right) \cdot \left(2, -\frac{3}{2}\right) = -\frac{4}{3} - \frac{3}{4} = -\frac{25}{12}$

b) $|\vec{u}| = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{5}{6}$ $\qquad |\vec{v}| = \sqrt{4 + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$

c) $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{-25/12}{(5/6) \cdot (5/2)} = -1 \rightarrow (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 180°$

7 **Se consideran los vectores $\vec{u}\left(m, \frac{1}{3}\right)$ y $\vec{v}(4, -3)$. Calcula el valor que debe tomar m para que se cumpla cada una de las siguientes afirmaciones:**

a) El vector $\vec{u}$ es unitario.

b) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares.

c) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen el mismo módulo.

Resolución

a) $|\vec{u}| = 1$

$$|\vec{u}| = \sqrt{m^2 + \frac{1}{9}} = 1 \rightarrow m^2 + \frac{1}{9} = 1 \rightarrow m^2 = \frac{8}{9} \begin{cases} m = 2\sqrt{2}/3 \\ m = -2\sqrt{2}/3 \end{cases}$$

b) $\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \left(m, \frac{1}{3}\right) \cdot (4, -3) = 4m - 1 = 0 \rightarrow m = \frac{1}{4}$$

c) $$\left.\begin{array}{l} |\vec{u}| = \sqrt{m^2 + 1/9} \\ |\vec{v}| = \sqrt{16 + 9} = 5 \end{array}\right\} m^2 + \frac{1}{9} = 25 \rightarrow m^2 = \frac{224}{9} \begin{cases} m = 4\sqrt{14}/3 \\ m = -4\sqrt{14}/3 \end{cases}$$

8 **Dado el vector $\vec{u}(x, y)$, cuyo módulo es $|\vec{u}| = 1$, determina:**

a) La forma que tendría un vector con la misma dirección que $\vec{u}$.

b) ¿Cuántos vectores unitarios con la misma dirección que $\vec{u}$ existen? Di cuáles son.

c) La forma que tendría un vector ortogonal a $\vec{u}$.

d) ¿Cuántos vectores unitarios ortogonales a $\vec{u}$ existen? Di cuáles son.

Resolución

a) Los vectores que tienen la misma dirección son proporcionales.

Los vectores con la misma dirección que $\vec{u}$ son de la forma $k(x, y) = (kx, ky)$, con $k \in \mathbb{R}$.

Resoluciones

b) Además de $\vec{u}$, su opuesto, $-\vec{u} = (-x, -y)$.

c) Los vectores de coordenadas $(-y, x)$ son ortogonales a $\vec{u}$. Todos los vectores ortogonales a $\vec{u}$ tendrán la forma $k(-y, x)$, con $k \in \mathbb{R}$.

d) Existen dos: $(-y, x)$, $(y, -x)$.

9 **Si $|\vec{u}| = 1$, $|\vec{v}| = 5$ y $|\vec{u} - \vec{v}| = 6$, calcula el ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.**

Resolución

$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = |\vec{u}|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 - 2|\vec{u}|\,|\vec{v}|\, cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) + |\vec{v}|^2$

Sustituyendo: $36 = 1 - 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) + 25 \rightarrow cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = -1 \rightarrow (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 180°$

10 **Calcula el valor de m para que los vectores $\vec{u}(1, 0)$ y $\vec{v}(m, 1)$ formen un ángulo de 120°.**

Resolución

$cos\ 120° = -\frac{1}{2}$; $|\vec{u}| = 1$; $|\vec{v}| = \sqrt{m^2 + 1}$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = (1, 0) \cdot (m, 1) = m$

$m = \vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot cos\ 120° = -\frac{1}{2}\sqrt{m^2 + 1} \rightarrow 2m = -\sqrt{m^2 + 1} \rightarrow$

$\rightarrow 4m^2 = m^2 + 1 \rightarrow 3m^2 = 1 \left\langle \begin{array}{l} m = \sqrt{3}/3 \rightarrow \text{No vale} \\ m = -\sqrt{3}/3 \end{array} \right.$

Comprobamos que los vectores (1, 0) y $(\sqrt{3}/3, 1)$ no forman un ángulo de 120°. Por tanto, la única solución válida es $m = -\sqrt{3}/3$.

11 **Calcula m y n para que los vectores $\vec{u}(-3, n)$ y $\vec{v}(m, 2)$ sean ortogonales y $|\vec{u}| = 5$.**

Resolución

$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = (-3, n) \cdot (m, 2) = -3m + 2n = 0$

$|\vec{u}| = \sqrt{9 + n^2} = 5 \rightarrow 9 + n^2 = 25 \rightarrow n = \pm 4$

Si $n = 4$, $-3m + 8 = 0 \rightarrow m = \frac{8}{3}$

Si $n = -4$, $-3m - 8 = 0 \rightarrow m = -\frac{8}{3}$

Hay, por tanto, dos soluciones: $\vec{u}(-3, 4)$, $\vec{v}\left(\frac{8}{3}, 2\right)$ y $\vec{u}(-3, -4)$, $\vec{v}\left(-\frac{8}{3}, 2\right)$