

Demostración. Distancia de un punto a una recta

La distancia del punto $P(a, b)$ a la recta $r: Ax + By + C = 0$ es:

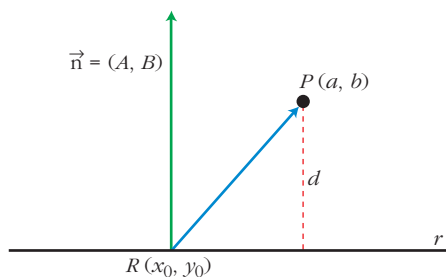
$$\text{dist}(P, r) = \frac{|Aa + Bb + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Demostración

Consideramos $P(a, b)$. Sea $R(x_0, y_0)$ un punto de la recta r .

Dados dos vectores \vec{u} y \vec{v} , sabemos que $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot (\text{proy}_{\vec{u}} \vec{v}) \rightarrow \text{proy}_{\vec{u}} \vec{v} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|}$ (1)

Llamemos $\vec{u} = \vec{n} = (A, B)$, $\vec{v} = \vec{RP} = (a - x_0, b - y_0)$.



En tal caso, $|\text{proy}_{\vec{u}} \vec{v}| = d =$ distancia de P a la recta r . Sustituyendo en (1):

$$\begin{aligned} d &= |\text{proy}_{\vec{u}} \vec{v}| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{RP}|}{|\vec{n}|} = \frac{|(A, B) \cdot (a - x_0, b - y_0)|}{|(A, B)|} = \\ &= \frac{|A(a - x_0) + B(b - y_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|Aa + Bb - (Ax_0 + By_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \\ &= \frac{|Aa + Bb + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (\text{pues } Ax_0 + By_0 = -C \text{ por ser } R(x_0, y_0) \text{ un punto de la recta } r) \end{aligned}$$

Por tanto, hemos obtenido que: $\text{dist}(P, r) = \frac{|Aa + Bb + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

Por ejemplo, la distancia de $P(-5, 8)$ a la recta $r: 2x - 6y + 7 = 0$ es:

$$\text{dist}(P, r) = \frac{|2(-5) - 6 \cdot 8 + 7|}{\sqrt{2^2 + (-6)^2}} = \frac{51}{\sqrt{40}}$$