

Amplía. Resolver un problema con vectores

Halla la ecuación de las rectas paralelas a  $r: 3x - 4y + 6 = 0$  que disten de ella 2 unidades.

Resolución

Las rectas paralelas a  $r$  tienen por ecuación  $s_k: 3x - 4y + k = 0$ . Para determinar una concreta, basta con conocer un punto de esa recta, pues su vector de dirección lo conocemos.

La idea es:

- Elegir un punto  $P$  de  $r$ .
- Buscar dos vectores perpendiculares a  $r$ , de sentidos contrarios, y de módulo 2 (buscamos rectas paralelas a  $r$  que disten 2 unidades de ella).
- Así, si trasladamos el punto  $P$  según esos vectores, encontraremos dos puntos  $Q$  y  $Q'$  que pertenecerán a las rectas  $s$  y  $t$  que buscamos.

- Elegimos un punto  $P \in r$ . Por ejemplo, para  $x = -2$ :

$$3 \cdot (-2) - 4y + 6 = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow P(-2, 0)$$

- El vector  $\vec{u}(3, -4)$  es perpendicular a  $r$ . Para encontrar uno de módulo 2, dividimos por  $|\vec{u}|$  y multiplicamos por 2:

$$\vec{v} = \frac{2\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{2 \cdot (3, -4)}{5} = \left(\frac{6}{5}, -\frac{8}{5}\right) \leftarrow \text{su módulo es 2.}$$

Tomamos, también,  $\vec{v}' = \left(-\frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right)$

- Para hallar  $Q$  y  $Q'$ , observamos que:

$$\vec{OP} + \vec{v} = \vec{OQ}, \text{ con } Q \in s$$

$$\vec{OP} + \vec{v}' = \vec{OQ'}, \text{ con } Q' \in t$$

$$\vec{OP} + \vec{v} = (-2, 0) + \left(\frac{6}{5}, -\frac{8}{5}\right) = \left(-\frac{4}{5}, -\frac{8}{5}\right) = Q$$

$$\vec{OP} + \vec{v}' = (-2, 0) + \left(-\frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right) = \left(-\frac{16}{5}, \frac{8}{5}\right) = Q'$$

- Sustituyendo  $Q$  en  $s_k$ , obtendremos la recta  $s$  que buscamos:

$$3 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) - 4 \cdot \left(-\frac{8}{5}\right) + k = 0 \rightarrow -\frac{12}{5} + \frac{32}{5} = -k \rightarrow k = -4$$

La recta  $s$  tiene por ecuación  $s: 3x - 4y - 4 = 0$ .

- Sustituyendo  $Q'$  en  $s_k$ , obtendremos la recta  $t$ :

$$3 \cdot \left(-\frac{16}{5}\right) - 4 \cdot \left(\frac{8}{5}\right) + k = 0 \rightarrow -\frac{48}{5} - \frac{32}{5} = -k \rightarrow k = 16$$

La ecuación de la recta  $t$  es  $t: 3x - 4y + 16 = 0$ .

