

Amplía. Resolver un problema con vectores

Halla la ecuación de las rectas paralelas a $r: 3x - 4y + 6 = 0$ que disten de ella 2 unidades.

Resolución

Las rectas paralelas a r tienen por ecuación $s_k: 3x - 4y + k = 0$. Para determinar una concreta, basta con conocer un punto de esa recta, pues su vector de dirección lo conocemos.

La idea es:

- Elegir un punto P de r .
- Buscar dos vectores perpendiculares a r , de sentidos contrarios, y de módulo 2 (buscamos rectas paralelas a r que disten 2 unidades de ella).
- Así, si trasladamos el punto P según esos vectores, encontraremos dos puntos Q y Q' que pertenecerán a las rectas s y t que buscamos.

- Elegimos un punto $P \in r$. Por ejemplo, para $x = -2$:

$$3 \cdot (-2) - 4y + 6 = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow P(-2, 0)$$

- El vector $\vec{u}(3, -4)$ es perpendicular a r . Para encontrar uno de módulo 2, dividimos por $|\vec{u}|$ y multiplicamos por 2:

$$\vec{v} = \frac{2\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{2 \cdot (3, -4)}{5} = \left(\frac{6}{5}, -\frac{8}{5}\right) \leftarrow \text{su módulo es 2.}$$

Tomamos, también, $\vec{v}' = \left(-\frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right)$

- Para hallar Q y Q' , observamos que:

$$\vec{OP} + \vec{v} = \vec{OQ}, \text{ con } Q \in s$$

$$\vec{OP} + \vec{v}' = \vec{OQ'}, \text{ con } Q' \in t$$

$$\vec{OP} + \vec{v} = (-2, 0) + \left(\frac{6}{5}, -\frac{8}{5}\right) = \left(-\frac{4}{5}, -\frac{8}{5}\right) = Q$$

$$\vec{OP} + \vec{v}' = (-2, 0) + \left(-\frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right) = \left(-\frac{16}{5}, \frac{8}{5}\right) = Q'$$

- Sustituyendo Q en s_k , obtendremos la recta s que buscamos:

$$3 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) - 4 \cdot \left(-\frac{8}{5}\right) + k = 0 \rightarrow -\frac{12}{5} + \frac{32}{5} = -k \rightarrow k = -4$$

La recta s tiene por ecuación $s: 3x - 4y - 4 = 0$.

- Sustituyendo Q' en s_k , obtendremos la recta t :

$$3 \cdot \left(-\frac{16}{5}\right) - 4 \cdot \left(\frac{8}{5}\right) + k = 0 \rightarrow -\frac{48}{5} - \frac{32}{5} = -k \rightarrow k = 16$$

La ecuación de la recta t es $t: 3x - 4y + 16 = 0$.

