

## Resoluciones

**1** Se consideran los puntos  $A(-2, 3)$  y  $B(4, 6)$ .

a) Calcula las coordenadas de un punto  $P$  que divida al segmento  $AB$  en dos partes tales que  $\vec{AP} = \frac{1}{2} \vec{PB}$ .

b) Determina  $k$  para que el punto  $Q(k, 2)$  esté alineado con  $A$  y  $B$ .

c) Halla el simétrico de  $A$  respecto de  $B$ .

### Resolución

a)  $A(-2, 3)$ ,  $B(4, 6)$ . Sea  $P(x, y)$ :

$$\vec{AP} = \frac{1}{2} \vec{PB} \rightarrow (x + 2, y - 3) = \frac{1}{2}(4 - x, 6 - y) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2 = \frac{4 - x}{2} \\ y - 3 = \frac{6 - y}{2} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 2x + 4 = 4 - x \rightarrow x = 0 \\ 2y - 6 = 6 - y \rightarrow y = 4 \end{array} \right\} P(0, 4)$$

b)  $Q(k, 2)$ . Para que  $A$ ,  $B$  y  $Q$  estén alineados, las coordenadas de los vectores  $\vec{AB}$  y  $\vec{AQ}$  han de ser proporcionales.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{AB} = (6, 3) \\ \vec{AQ} = (k + 2, 2 - 3) \end{array} \right\} \frac{6}{k + 2} = \frac{3}{-1} \rightarrow 3k + 6 = -6 \rightarrow k = -4$$

c) Si  $C(x, y)$  es el simétrico de  $A$  respecto de  $B$ , entonces  $B$  es el punto medio del segmento  $AC$ .

$$(4, 6) = \left( \frac{x - 2}{2}, \frac{y + 3}{2} \right) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 8 = x - 2 \rightarrow x = 10 \\ 12 = y + 3 \rightarrow y = 9 \end{array} \right\} C = (10, 9)$$

**2** Escribe las ecuaciones paramétricas e implícita de las rectas que cumplen estas condiciones:

a) Pasa por los puntos  $A(3, -2)$  y  $B(-5, -1)$ .

b) Pasa por  $P(-1, 3)$  y es paralela a  $s: \frac{x-3}{3} = y$ .

### Resolución

a) Vector posición:  $\vec{p} = (3, -2)$

Vector dirección:  $\vec{d} = \vec{AB} = (-8, 1)$

$$\text{Ecuaciones paramétricas: } \begin{cases} x = 3 - 8t \\ y = -2 + t \end{cases}$$

$$t = y + 2; x = 3 - 8(y + 2) = 3 - 8y - 16 \rightarrow x + 8y + 13 = 0$$

$$\text{Ecuación implícita: } x + 8y + 13 = 0$$

b) El vector dirección de  $s$  es  $(3, 1)$ .

$$\text{Ecuaciones paramétricas: } \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 3 + t \end{cases}$$

$$t = y - 3 \rightarrow x = -1 + 3(y - 3) \rightarrow x = -1 + 3y - 9 \rightarrow x - 3y + 10 = 0$$

$$\text{Ecuación implícita: } x - 3y + 10 = 0$$

10. Autoevaluación ampliada

Resoluciones

3 Escribe las ecuaciones continua y explícita de las rectas que cumplen estas condiciones:

a) Pasa por el punto de intersección de las rectas  $r: 3x + 4y + 1 = 0$  y  $s: 5x + y - 4 = 0$  y es perpendicular a  $r$ .

b) Pasa por  $P(0, 3)$  y es perpendicular al eje de abscisas.

Resolución

a) Calculamos primero el punto de intersección,  $P$ , de  $r$  y  $s$ :

$$\begin{cases} 3x + 4y + 1 = 0 \\ 5x + y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 4y + 1 = 0 \\ -20x - 4y + 16 = 0 \end{cases}$$

$$-17x + 17 = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow y = -1$$

El punto de intersección de  $r$  y  $s$  es  $P(1, -1)$ .

Como la recta buscada ha de ser perpendicular a  $r$ , su vector dirección es  $(3, 4)$ .

Ecuación continua:  $\frac{x - 1}{3} = \frac{y + 1}{4}$

$4x - 4 = 3y + 3 \rightarrow y = \frac{4x - 7}{3}$

Ecuación explícita:  $y = \frac{4}{3}x - \frac{7}{3}$

b) Como ha de ser perpendicular al eje de abscisas, su vector dirección es  $(0, 1)$ .

Ecuación continua:  $\frac{x - 0}{0} = \frac{y - 3}{1} \rightarrow \frac{x}{0} = \frac{y - 3}{1}$

Ecuación explícita: No tiene. Es la recta vertical  $x = 0$  (eje  $Y$ ).

4 Halla la posición relativa de las rectas  $r$  y  $s$  y de las rectas  $s$  y  $t$ . Si son secantes, calcula el punto de corte, y si son paralelas, calcula la distancia entre ellas.

$$r: \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2 + 3t \end{cases} \quad s: 3x + y - 5 = 0 \quad t: y = \frac{1}{2}(x - 3) + 2$$

Resolución

Vector dirección de  $r$ :  $(-1, 3)$ . Vector dirección de  $s$ :  $(-1, 3)$ . Vector dirección de  $t$ :  $(2, 1)$

• Las rectas  $r$  y  $s$  son paralelas, ya que sus vectores dirección son iguales. Calculemos la distancia entre ellas: buscamos un punto  $P \in r$  y calculamos la distancia de  $P$  a  $s$ .

$P(3, 2) \in r$

$$dist(P, s) = \frac{|3 \cdot 3 + 2 - 5|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{6}{\sqrt{10}} = \frac{6\sqrt{10}}{10} = \frac{3\sqrt{10}}{5}$$

• Las rectas  $s$  y  $t$  son secantes. Calculemos su punto de corte:

$$\begin{cases} s: 3x + y - 5 = 0 \\ t: 2y - x + 3 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x + 2y - 10 = 0 \\ x - 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$7x - 9 = 0 \rightarrow x = 9/7$$

$y = 5 - 3x = 5 - \frac{27}{7} = \frac{8}{7}$

$s$  y  $t$  se cortan en el punto  $(\frac{9}{7}, \frac{8}{7})$ .

10. Autoevaluación ampliada

Resoluciones

5 Calcula el ángulo que forman los siguientes pares de rectas:

$$\text{a) } \begin{cases} r: x = 0 \\ s: y = 2x + 1 \end{cases} \qquad \text{b) } \begin{cases} r: 2x + y - 2 = 0 \\ s: 3x - y = 0 \end{cases}$$

Resolución

a) El vector dirección de  $r$  es  $\vec{d}_r(0, 1)$ .

El vector dirección de  $s$  es  $\vec{d}_s(1, 2)$ .

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{d}_r \cdot \vec{d}_s|}{|\vec{d}_r| |\vec{d}_s|} = \frac{|0 + 2|}{1 \cdot \sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \rightarrow \alpha = 26^\circ 33' 54,18''$$

b)  $\vec{v}_r = (2, 1) \perp r$      $\vec{v}_s = (3, -1) \perp s$

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s|}{|\vec{v}_r| |\vec{v}_s|} = \frac{|6 - 1|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \alpha = 45^\circ$$

6 Considera las rectas  $r: y = 2x - 1$  y  $s: y = kx + 3$ . Determina el valor de  $k$  para que estas rectas se corten formando un ángulo de  $45^\circ$ .

Resolución

Las pendientes de  $r$  y  $s$  son, respectivamente,  $m_r = 2$  y  $m_s = k$ .

$$\operatorname{tg} 45^\circ = 1 = \left| \frac{m_s - m_r}{1 + m_r m_s} \right| = \left| \frac{k - 2}{1 + 2k} \right| \rightarrow \begin{cases} k - 2 = 1 + 2k \rightarrow k = -3 \\ k - 2 = -1 - 2k \rightarrow k = 1/3 \end{cases}$$

7 Determina  $b$  para que la distancia entre la recta  $r: 3x + 4y + b = 0$  y el punto  $P(-1, 1)$  sea igual a  $0,4$ .

Resolución

$$\operatorname{dist}(P, r) = \frac{|3 \cdot (-1) + 4 \cdot 1 + b|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|b + 1|}{5} = 0,4 \rightarrow \begin{cases} b + 1 = 2 \rightarrow b = 1 \\ b + 1 = -2 \rightarrow b = -3 \end{cases}$$

8 Calcula el valor de  $k$  para que la distancia entre  $A(k, 3)$  y  $B$  sea igual a  $\sqrt{101}$ , siendo  $B$  el punto de corte de las rectas  $r: x = 2$  y  $s: 2x + y + 3 = 0$ .

Resolución

Calculamos el punto de corte,  $B$ , de  $r$  y  $s$ :

$$\begin{cases} x = 2 \\ 2x + y + 3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 - 2x = -7 \end{cases} \rightarrow B(2, -7)$$

$$\operatorname{dist}(A, B) = \sqrt{(2 - k)^2 + (-7 - 3)^2} = \sqrt{4 + k^2 - 4k + 100} = \sqrt{101} \rightarrow$$

$$\rightarrow k^2 - 4k + 104 = 101 \rightarrow k^2 - 4k + 3 = 0 \begin{cases} k = 3 \\ k = 1 \end{cases}$$

10. Autoevaluación ampliada

Resoluciones

- 9 Calcula un punto cuya primera coordenada sea un tercio de la segunda y cuya distancia a la recta  $r: 3x - 4y + 3 = 0$  sea 3.

Resolución

El punto  $P$  buscado es de la forma  $P\left(\frac{y}{3}, y\right)$ .

$$\text{dist}(P, r) = \frac{|3 \cdot y/3 - 4y + 3|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|-3y + 3|}{5} = 3 \rightarrow$$

- 10 En un triángulo de vértices  $A(-3, 1)$ ,  $B(-2, -2)$  y  $C(1, 2)$ , determina:

- a) La ecuación de la recta que contiene a la altura que pasa por  $C$  y la medida de esa altura.
- b) La ecuación de la recta que contiene a la mediana que pasa por  $C$ .
- c) El área del triángulo.
- d) Los ángulos del triángulo.

Resolución

- a) • La recta que contiene a la altura que pasa por  $C$  es perpendicular a  $AB$ .

Calculamos primero la recta  $r$  que contiene a  $AB$ :

$$(1, -3) \quad A(-3, 1)$$

$$r: \frac{y - 1}{-3} = \frac{x + 3}{-3} \rightarrow r: 3x + y + 8 = 0$$

La recta  $s$ , perpendicular a  $AB$  que pasa por  $C$ , es:

$$\vec{d}_s(3, 1) \quad C(1, 2)$$

$$s: \frac{x - 1}{3} = \frac{y - 2}{1} \rightarrow s: x - 3y + 5 = 0 \leftarrow \text{Recta que contiene a la altura que pasa por } C.$$

- La medida de la altura pedida es  $\overline{PC}$ , donde  $P$  es el punto de intersección de las rectas  $r$  y  $s$ .

$$P = r \cap s \begin{cases} 3x + y + 8 = 0 \rightarrow y = -8 - 3x \\ x - 3y + 5 = 0 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} x - 3(-8 - 3x) + 5 = 0 &\rightarrow 10x + 29 = 0 \rightarrow x = -\frac{29}{10} \\ y = -8 + 3 \cdot \frac{29}{10} &= \frac{7}{10} \end{aligned} \right\} P\left(-\frac{29}{10}, \frac{7}{10}\right)$$

$$h_c = \overline{CP} = \sqrt{\left(-\frac{29}{10} - 1\right)^2 + \left(\frac{7}{10} - 2\right)^2} = \sqrt{\frac{1690}{100}} \approx 4,11$$

- b) La mediana que pasa por  $C$  pasa también por  $M$ , punto medio del segmento  $AB$ .

$$M = \left(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right) \quad C(1, 2) \quad \vec{MC}\left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

Tomamos como vector dirección  $(7, 5)$ .

La ecuación de la recta que buscamos es:

$$\frac{x - 1}{7} = \frac{y - 2}{5} \rightarrow 5x - 5 = 7y - 14 \rightarrow 5x - 7y + 9 = 0$$

## 10. Autoevaluación ampliada

Pág. 5 de 5

## Resoluciones

$$c) \text{ Área del triángulo} = \frac{|\vec{AB}| \cdot h_c}{2} \approx \frac{\sqrt{1^2 + (-3)^2} \cdot 4,11}{2} \approx 6,5 \text{ u}^2$$

d) • El ángulo  $\alpha$ , formado por los lados  $AB$  y  $AC$ , es el ángulo formado por los vectores  $\vec{AB}$  y  $\vec{AC}$ :

$$\vec{AB} = (1, -3) \quad |\vec{AB}| = \sqrt{10}$$

$$\vec{AC} = (4, 1) \quad |\vec{AC}| = \sqrt{17}$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| |\vec{AC}|} = \frac{4 - 3}{\sqrt{170}} = \frac{\sqrt{170}}{170} \rightarrow \alpha = 85^\circ 36' 4,66''$$

• Análogamente calculamos el ángulo  $\beta$ , formado por  $\vec{BA}$  y  $\vec{BC}$ :

$$\vec{BA} = (-1, 3) \quad |\vec{BA}| = \sqrt{10}$$

$$\vec{BC} = (3, 4) \quad |\vec{BC}| = 5$$

$$\cos \beta = \frac{-3 + 12}{5\sqrt{10}} = \frac{9}{5\sqrt{10}} \rightarrow \beta = 55^\circ 18' 17,45''$$

• Al ángulo formado por  $\vec{CA}$  y  $\vec{CB}$  lo llamaremos  $\gamma$ :

$$\vec{CA} = (-4, -1) \quad |\vec{CA}| = \sqrt{17}$$

$$\vec{CB} = (-3, -4) \quad |\vec{CB}| = 5$$

$$\cos \gamma = \frac{12 + 4}{5\sqrt{17}} = \frac{16}{5\sqrt{17}} \rightarrow \gamma = 39^\circ 5' 37,89''$$