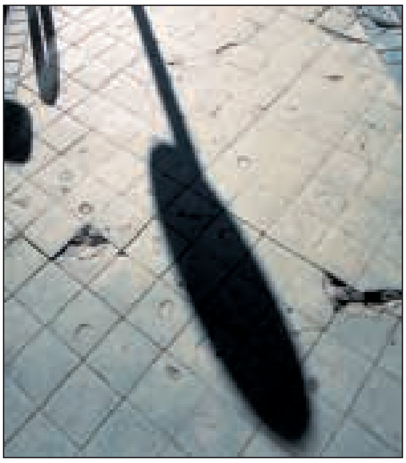
PROPIEDADES Y CURIOSIDADES DE LAS CÓNICAS

Las cónicas aparecen espontáneamente en la naturaleza y, por sus propiedades y su belleza, son utilizadas en la técnica y el arte.

Cónicas cotidianas

Si te preguntaran si hoy has visto alguna cónica (en tu casa, por la calle…) seguramente dirías que no. No obstante, al observar las siguientes ilustraciones, admitirás que las cónicas son figuras con las que nos encontramos a menudo.



Órbitas de planetas y cometas. Excentricidad

La órbita de la Tierra respecto al Sol es una elipse; pero una elipse muy parecida a una circunferencia, es decir, *muy poco achatada* (muy poco **excéntrica**).

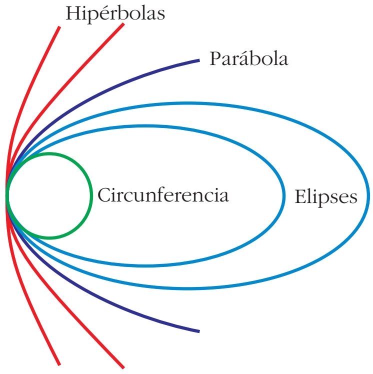
Los cometas tienen órbitas elípticas muy alargadas e, incluso, algunos de ellos tienen órbitas hiperbólicas (es decir, son muy excéntricas).

Reflexiones sobre la excentricidad de las cónicas:

Aquí se te presenta una familia de cónicas con un foco común y tangentes en un extremo del eje mayor.

En la circunferencia, los dos focos coinciden con el centro. Por tanto, su excentricidad es cero.

Las excentricidades de las elipses oscilan de 0 a 1. La excentricidad de la parábola es igual a 1 y las de las hipérbolas, mayores que 1.



Las órbitas de los planetas son elipses. El Sol ocupa uno de sus focos. Sus excentricidades oscilan entre 0,004 (Neptuno) y 0,206 (Mercurio). La excentricidad de la órbita de la Tierra es 0,017. Todas ellas, salvo la de Mercurio, son muy poco excéntricas, muy parecidas a circunferencias.

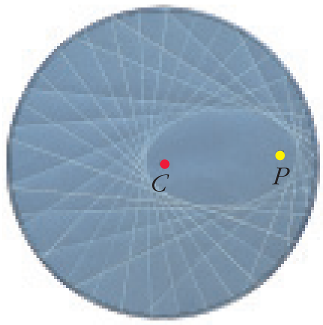
Sin embargo, los cometas conocidos tienen órbitas elípticas muy excéntricas (excentricidades próximas a 1). Si un cometa tiene órbita hiperbólica (excentricidad mayor que 1), solo pasa una vez por las proximidades del Sol. Después, se aleja indefinidamente y nunca más vuelve hacia el Sol.

Trazado de tangentes

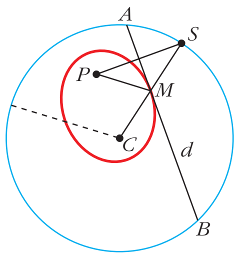
TANGENTE A UNA ELIPSE

La siguiente actividad es muy interesante:

Dibuja una circunferencia de centro C y radio r. Sitúa en su interior un punto P distinto del centro. Dobla el papel de modo que se haga pasar la circunferencia por el punto P. Vuelve a hacerlo más de doce veces. Si, como en la ilustración, vas recorriendo todas las partes de la circunferencia, verás que las líneas de los pliegues envuelven una hermosa elipse cuyos focos son P y C.



Vamos a demostrar que los dobleces son tangentes a la elipse y que la constante de la elipse (suma de distancias a los focos) es el radio, r, de la circunferencia.



Llamando S al punto simétrico de P por el doblez d y uniendo S con C, cortamos a d en M.

M es un punto de la elipse, pues:

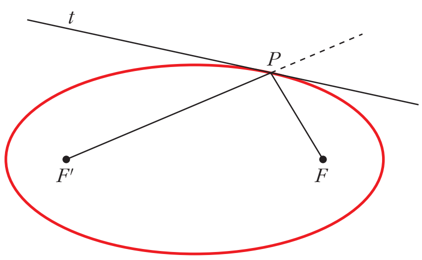
$$\overline{MP} = \overline{SM} \quad \text{y} \quad \overline{MP} + \overline{MC} = \overline{SM} + \overline{MC} = r$$

M es el único punto de la elipse que está en d. Por tanto, el doblez d es la recta tangente a la elipse en M.

Además, como ves, $\widehat{BMC} = \widehat{AMS}$ y, por simetría, $\widehat{AMS} = \widehat{AMP}$; luego, la tangente es la bisectriz exterior del ángulo de vértice M, y lados, las rectas que unen M con los focos (radios vectores).

En resumen:

La tangente a una elipse en un punto P es la bisectriz exterior de los radios vectores PF y PF'.

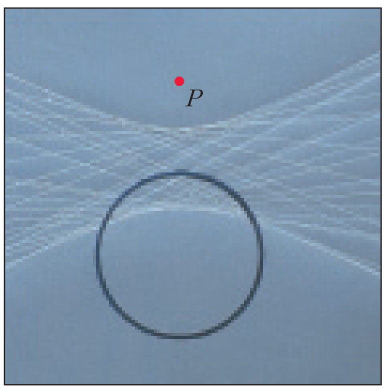


TANGENTE A UNA HIPÉRBOLA

Si se repite la actividad descrita más arriba poniendo el punto P exterior a la circunferencia, se obtiene una hipérbola como curva tangente a los dobleces.

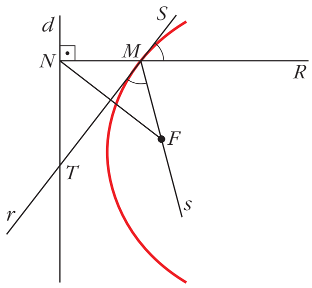
Razonando de forma similar a la anterior, se llega a la siguiente conclusión:

La tangente a una hipérbola en un punto es la bisectriz interior de los radios vectores que parten de ese punto.

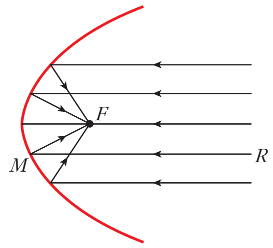


TANGENTE A UNA PARÁBOLA

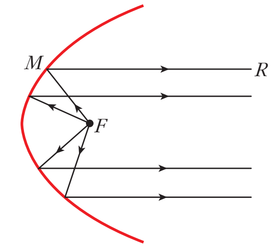
Si sobre un papel trazas una recta d y un punto F, y doblas el papel haciendo coincidir el punto F con un punto de la recta, los dobleces r son tangentes a una parábola de foco F y directriz d:



Espejo parabólico



Faro de coche



El doblez r es la mediatriz del segmento NF, y si desde N trazamos la perpendicular a d que corta a r en M, resulta que M es un punto de la parábola, pues $\overline{MN} = \overline{MF}$.

Además, como ves, $\widehat{RMS} = \widehat{NMT}$ y, por simetría, $\widehat{NMT} = \widehat{TMF}$.

Por tanto, un rayo de luz (RM) que llegue paralelo al eje de la parábola en un espejo parabólico, se reflejará pasando por el foco F. Este fenómeno se utiliza en los hornos solares. Del mismo modo, si la bombilla del faro de un coche está en el foco, su luz, al reflejarse, tomará una dirección paralela al eje.

EJERCICIOS

1. Lewis Carroll, el matemático autor de *"Alicia en el País de las Maravillas"*, se construyó una mesa de billar de forma elíptica. En ella, si una bola pasa por un foco, sin efecto, pasará necesariamente por el otro foco después de rebotar. Y así, sucesivamente, hasta que se pare. Explica por qué.

2. A veces, en el andén del metro se produce el siguiente fenómeno: una persona oye hablar a otra con absoluta nitidez, pero no la encuentra cerca. Mirando a su alrededor, llega a descubrir que la voz procede de alguien que está en el andén de enfrente y que no está hablando más fuerte que los demás. Explica a qué se debe este hecho, partiendo de que la bóveda del andén es semielíptica.

3. Halla la ecuación de la tangente a la elipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ en los puntos de abscisa 3.

☛ *Utiliza el hecho de que la recta tangente es la bisectriz del ángulo que forman los radios vectores. De las dos bisectrices, tendrás que elegir la adecuada.*

4. Halla la tangente a la hipérbola $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ en el punto de abscisa 5.

☛ *Utiliza el hecho de que la tangente es la bisectriz de los radios vectores y elige la adecuada.*

5. Halla la tangente a la parábola $y^2 = 12x$ en el punto $P(3, 6)$.

☛ *Utiliza el hecho de que la tangente es la bisectriz del ángulo formado por el radio vector PF y la recta perpendicular por P a la directriz.*