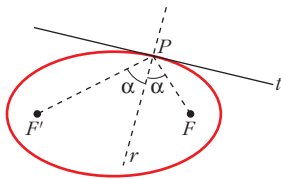


Soluciones de los ejercicios

PROPIEDADES Y CURIOSIDADES DE LAS CÓNICAS

1. Lewis Carroll, el matemático autor de "Alicia en el País de las Maravillas", se construyó una mesa de billar de forma elíptica. En ella, si una bola pasa por un foco, sin efecto, pasará necesariamente por el otro foco después de rebotar. Y así, sucesivamente, hasta que se pare. Explica por qué.



Llamamos P al punto en el que rebota la bola que ha pasado por F . Hemos visto que si t es tangente a la elipse en P , entonces t es la bisectriz exterior de los radios rectores PF y PF' . Llamamos r a la otra bisectriz. Tenemos que el ángulo formado por r y PF' coincide con el ángulo formado por r y PF . Por tanto, la bola que pase por F , necesariamente pasará por el otro foco, F' , al rebotar.

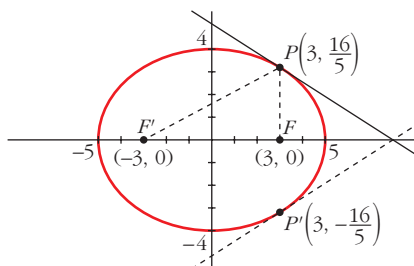
2. A veces, en el andén del metro se produce el siguiente fenómeno: una persona oye hablar a otra con absoluta nitidez, pero no la encuentra cerca. Mirando a su alrededor, llega a descubrir que la voz procede de alguien que está en el andén de enfrente y que no está hablando más fuerte que los demás. Explica a qué se debe este hecho, partiendo de que la bóveda del andén es semielíptica.

La boca de la persona que habla está situada sobre uno de los focos de la elipse y una oreja de la persona que escucha está en el otro foco.

Una gran cantidad de sonido que emite la primera persona, tras chocar en la bóveda, va a parar a la oreja de la segunda. Esta recibe una cantidad de sonido muy superior a la que cabía esperar. Por eso da la impresión de que el emisor está más cerca.

3. Halla la ecuación de la tangente a la elipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ en los puntos de abscisa 3.

Utiliza el hecho de que la recta tangente es la bisectriz del ángulo que forman los radios vectores. De las dos bisectrices, tendrás que elegir la adecuada.



Los focos de la elipse son $F(3, 0)$ y $F'(-3, 0)$. Hallamos los puntos de abscisa $x = 3$:

$$\frac{9}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \rightarrow y = \pm \frac{16}{5}$$

Hay dos puntos: $P\left(3, \frac{16}{5}\right)$ y $P'\left(3, -\frac{16}{5}\right)$.

- Para $P\left(3, \frac{16}{5}\right)$: Obtenemos las bisectrices de los ángulos formados por las rectas que pasan por PF y por PF' :

— recta, r_1 , que pasa por $PF \rightarrow x = 3 \rightarrow x - 3 = 0$

— recta, r_2 , que pasa por $PF' \rightarrow m = \frac{8}{15} \rightarrow y = \frac{8}{15}(x + 3) \rightarrow 8x - 15y + 24 = 0$

Bisectrices: $dist((x, y), r_1) = dist((x, y), r_2)$

$$|x - 3| = \frac{|8x - 15y + 24|}{17}$$

Soluciones de los ejercicios

$$\begin{cases} 17x - 51 = 8x - 15y + 24 \rightarrow 3x + 5y - 25 = 0 \\ 17x - 51 = -8x + 15y - 24 \rightarrow 25x - 15y - 27 = 0 \end{cases}$$

La tangente que buscamos es la que tiene pendiente negativa; es decir: $3x + 5y - 25 = 0$

- Para $P'\left(3, -\frac{16}{5}\right)$, tendríamos:

— recta, r_3 , que pasa por $PF \rightarrow x = 3 \rightarrow x - 3 = 0$

— recta, r_4 , que pasa por $PF' \rightarrow m' = -\frac{8}{15} \rightarrow y = -\frac{8}{15}(x + 3) \rightarrow$
 $\rightarrow 8x + 15y + 24 = 0$

Bisectrices: $dist((x, y), r_3) = dist((x, y), r_4)$

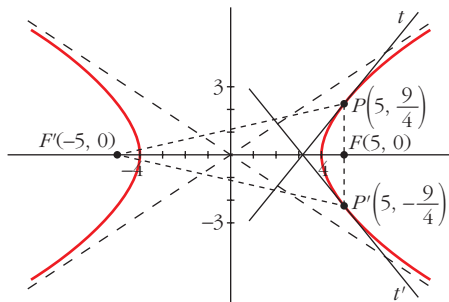
$$|x - 3| = \frac{|8x + 15y + 24|}{17}$$

$$\begin{cases} 17x - 51 = 8x + 15y + 24 \rightarrow 3x - 5y - 25 = 0 \\ 17x - 51 = -8x - 15y - 24 \rightarrow 25x + 15y - 27 = 0 \end{cases}$$

La tangente en este caso es la que tiene pendiente positiva; es decir: $3x - 5y - 25 = 0$

4. Halla la tangente a la hipérbola $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ en el punto de abscisa 5.

- Utiliza el hecho de que la tangente es la bisectriz de los radios vectores y elige la adecuada.



Hallamos los puntos de abscisa $x = 5$:

$$\frac{25}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \rightarrow y^2 = \frac{81}{16} \rightarrow y = \pm \frac{9}{4}$$

Hay dos puntos: $P\left(5, \frac{9}{4}\right)$ y $P'\left(5, -\frac{9}{4}\right)$.

- Para $P\left(5, \frac{9}{4}\right)$:

— recta, r_1 , que pasa por $PF \rightarrow x - 5 = 0$

— recta, r_2 , que pasa por PF' :

$$m = \frac{9/4}{10} = \frac{9}{40} \rightarrow y = \frac{9}{40}(x + 5) \rightarrow 9x - 40y + 45 = 0$$

Bisectrices: $dist((x, y), r_1) = dist((x, y), r_2)$

$$|x - 5| = \frac{|9x - 40y + 45|}{41}$$

$$\begin{cases} 41x - 205 = 9x - 40y + 45 \rightarrow 16x + 20y - 125 = 0 \\ 41x - 205 = -9x + 40y - 45 \rightarrow 5x - 4y - 16 = 0 \end{cases}$$

La recta que buscamos tiene pendiente positiva; por tanto, es $5x - 4y - 16 = 0$.

Soluciones de los ejercicios

- Para $P' \left(5, \frac{-9}{4} \right)$:

— recta, r_3 , que pasa por $PF \rightarrow x - 5 = 0$

— recta, r_4 , que pasa por $P'F'$:

$$m' = \frac{-9/4}{10} = \frac{-9}{40} \rightarrow y = \frac{-9}{40}(x + 5) \rightarrow 9x + 40y + 45 = 0$$

Bisectrices: $dist((x, y), r_3) = dist((x, y), r_4)$

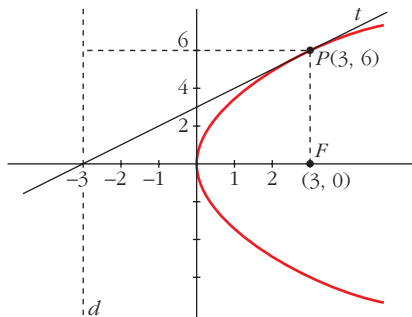
$$|x - 5| = \frac{|9x + 40y + 45|}{41}$$

$$\begin{cases} 41x - 205 = 9x + 40y + 45 \rightarrow 16x - 20y - 125 = 0 \\ 41x - 205 = -9x - 40y - 45 \rightarrow 5x + 4y - 16 = 0 \end{cases}$$

La recta que buscamos tiene pendiente negativa; por tanto, es $5x + 4y - 16 = 0$.

5. Halla la tangente a la parábola $y^2 = 12x$ en el punto $P(3, 6)$.

• Utiliza el hecho de que la tangente es la bisectriz del ángulo formado por el radio vector PF y la recta perpendicular por P a la directriz.



- Hallamos el foco y la directriz de la parábola:

$$F(3, 0); \quad d: x = -3$$

— recta, r_1 , que pasa por P y por F :

$$x = 3 \rightarrow x - 3 = 0$$

— recta, r_2 , que pasa por P y es perpendicular a d :

$$y = 6 \rightarrow y - 6 = 0$$

Bisectriz del ángulo formado por r_1 y r_2 : $dist((x, y), r_1) = dist((x, y), r_2)$

$$|x - 3| = |y - 6| \begin{cases} x - 3 = y - 6 \rightarrow x - y + 3 = 0 \\ x - 3 = -y + 6 \rightarrow x + y - 9 = 0 \end{cases}$$

La tangente que buscamos es la que tiene pendiente positiva; es decir: $x - y + 3 = 0$