

Resoluciones

1 Identifica las siguientes cónicas, calcula sus elementos característicos y dibújalas:

a) $x^2 - 9y^2 = 81$ b) $3x^2 + 3y^2 = 27$ c) $x^2 + 4y^2 = 16$ d) $y^2 - 12x = 0$

Resolución

a) $x^2 - 9y^2 = 81 \rightarrow \frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{9} = 1$

Es una hipérbola, con:

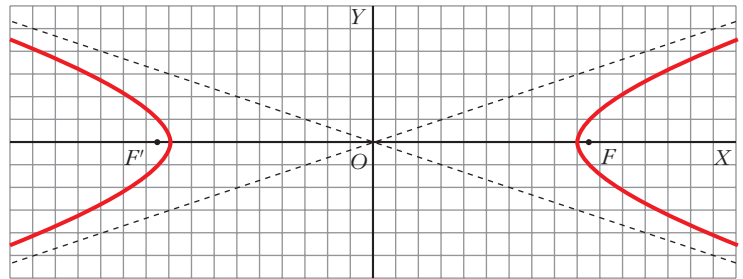
$a = 9; b = 3; c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$

$exc = \frac{c}{a} = \frac{3\sqrt{10}}{9} = \frac{\sqrt{10}}{3} \approx 1,05$

Focos: $F(3\sqrt{10}, 0)$ $F'(-3\sqrt{10}, 0)$

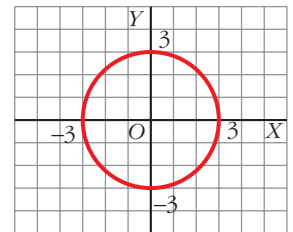
Vértices: $V(9, 0)$ y $V'(-9, 0)$

Asíntotas: $y = \frac{1}{3}x$ e $y = -\frac{1}{3}x$



b) $3x^2 + 3y^2 = 27 \rightarrow x^2 + y^2 = 9$

Es una circunferencia de centro el punto (0, 0) y radio $r = 3$.



c) $x^2 + 4y^2 = 16 \rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$

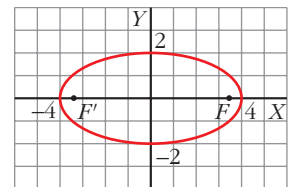
Es una elipse, en la que:

$a = 4; b = 2; c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16 - 4} = 2\sqrt{3}$

$exc = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,87$

Vértices: $(4, 0)$ $(-4, 0)$ $(0, 2)$ $(0, -2)$

Focos: $F(2\sqrt{3}, 0)$ $F'(-2\sqrt{3}, 0)$



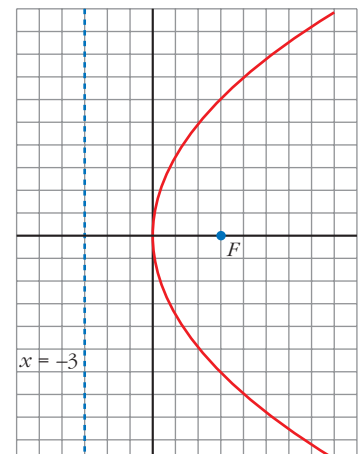
d) $y^2 - 12x = 0 \rightarrow y^2 = 12x$

Es una parábola con vértice en el punto (0, 0).

$2p = 12 \rightarrow p = 6 \rightarrow -\frac{p}{2} = -3$

Su recta directriz es $x = -3$.

Foco: $F(3, 0)$



4. Autoevaluación ampliada

Pág. 2 de 4

Resoluciones

- 2** Escribe la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $P(4, 1)$, $Q(-1, -4)$ y $R(2, 5)$.

Resolución

La circunferencia es de la forma $C_1: x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} P(4, 1) \in C_1 \rightarrow 16 + 1 + 4A + B + C = 0 \rightarrow 4A + B + C = -17 \\ Q(-1, -4) \in C_1 \rightarrow 1 + 16 - A - 4B + C = 0 \rightarrow -A - 4B + C = -17 \\ R(2, 5) \in C_1 \rightarrow 4 + 25 + 2A + 5B + C = 0 \rightarrow 2A + 5B + C = -29 \end{array} \right\}$$

Resolviendo el sistema obtenemos $A = 2$, $B = -2$ y $C = -23$, con lo que la ecuación de la circunferencia es $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 23 = 0$.

- 3** Se consideran los puntos $P(2, 3)$ y $Q(4, 3)$; las rectas $r: y = 2x$ y $s: y = 1$, y las circunferencias $C_1: x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$ y $C_2: x^2 + y^2 - 10x - 8y + 40 = 0$.

- a) Calcula la potencia de P a C_1 y de Q a C_1 . Utilízalo para calcular la posición relativa de estos dos puntos respecto a C_1 .
- b) Estudia la posición relativa de r y de s respecto a C_1 .
- c) Calcula el eje radical de C_1 y C_2 .

Resolución

- a) • Potencia de $P(2, 3)$ a $C_1: x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$.

Calculamos primero el centro y el radio de la circunferencia:

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0 \rightarrow (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 2^2$$

Su centro es $O_1(2, 3)$, y su radio, $r_1 = 2$.

Observamos que $P(2, 3)$ es el centro de la circunferencia, por lo que $dist(P, O_1) = 0 = d_1$

$$P = d_1^2 - r_1^2 = 0 - 4 = -4 < 0 \rightarrow \text{el punto } P \text{ es interior a la circunferencia.}$$

- Potencia de $Q(4, 3)$ a $C_1: x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$.

$$dist(Q, O_1) = \sqrt{(-2)^2 + 0} = 2 = d_2$$

$$P = d_2^2 - r_1^2 = 4 - 4 = 0 \rightarrow Q \text{ es un punto de } C_1.$$

- b) • Posición de $r: 2x - y = 0$ respecto a C_1 .

Calculamos la distancia de O_1 , centro de C_1 , a la recta r :

$$dist(r, O_1) = \frac{|2 \cdot 2 - 3|}{\sqrt{2^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \approx 0,45 < r_1 = 2$$

Por tanto, la recta r es secante a C_1 .

- Posición de $s: y - 1 = 0$ respecto a C_1 .

$$dist(s, O_1) = \frac{|3 - 1|}{1} = 2 = r_1$$

Por tanto, la recta s es tangente a C_1 .

- c) Eje radical de C_1 y C_2 .

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = x^2 + y^2 - 10x - 8y + 40$$

$$6x + 2y - 31 = 0 \leftarrow \text{Eje radical.}$$

4. Autoevaluación ampliada

Pág. 3 de 4

Resoluciones

4 Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que cumplen:

- a) La suma de distancias a $P(3, 0)$ y a $P'(-3, 0)$ es igual a 10.
 b) La diferencia de distancias a $P(3, 0)$ y a $P'(-3, 0)$ es igual a 2.
 c) Equidistan del punto $(0, 5)$ y de la recta $y = -5$.

Resolución

a) Es una elipse de focos los puntos dados, $P(3, 0)$ y $P'(-3, 0)$, y constante $k = 10$.

$$k = 2a \rightarrow a = 5, \text{ semieje mayor.}$$

$$\text{Semidistancia focal: } c = 3$$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{25 - 9} = 4, \text{ semieje menor.}$$

$$\text{La ecuación de la elipse es } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

b) Es una hipérbola de focos los puntos dados, P y P' , y constante $k = 2$.

$$k = 2a \rightarrow a = 1$$

$$\text{Semidistancia focal: } c = 3$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{9 - 1} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{La ecuación de la hipérbola es } x^2 - \frac{y^2}{8} = 1.$$

c) Es una parábola de foco el punto $F(0, 5)$ y recta directriz $y = -5$.

Su ecuación será de la forma $x^2 = 2py$, en la que su recta directriz es $y = -\frac{p}{2}$.

$$-\frac{p}{2} = -5 \rightarrow p = 10$$

La ecuación buscada es, por tanto, $x^2 = 20y$.

5 Halla el lugar geométrico de los puntos del plano, P , cuyo cociente de distancias al punto $A(3, 0)$ y a la recta $r: x = \frac{1}{3}$ es igual a 3. Es decir, $\frac{\text{dist}(P, A)}{\text{dist}(P, r)} = 3$.

Reconoce qué tipo de curva es, describe sus elementos y represéntala.

Resolución

Sean los puntos del plano $P(x, y)$. $A(3, 0)$, $r: x - \frac{1}{3} = 0$. $\text{dist}(P, A) = \sqrt{(x-3)^2 + y^2}$; $\text{dist}(P, r) = \left| x - \frac{1}{3} \right|$

$$\frac{\text{dist}(P, A)}{\text{dist}(P, r)} = \frac{\sqrt{(x-3)^2 + y^2}}{\left| x - \frac{1}{3} \right|} = 3 \rightarrow (x-3)^2 + y^2 = \left[3 \left(x - \frac{1}{3} \right) \right]^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 = 9x^2 + 1 - 6x \rightarrow 8x^2 - y^2 = 8 \rightarrow x^2 - \frac{y^2}{8} = 1$$

Es una hipérbola.

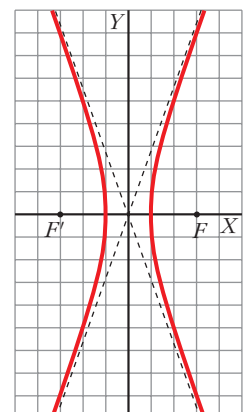
$$a = 1, \quad b = 2\sqrt{2}$$

$$\text{Semidistancia focal: } c = \sqrt{a^2 + b^2} = 3$$

$$\text{Focos: } F(3, 0) \text{ y } F'(-3, 0)$$

$$\text{Asíntotas: } y = 2\sqrt{2}x \text{ e } y = -2\sqrt{2}x$$

$$\text{exc} = \frac{c}{a} = 3; \text{ Vértices: } V(1, 0) \text{ y } V'(-1, 0)$$



4. Autoevaluación ampliada

Pág. 4 de 4

Resoluciones

- 6 Halla la ecuación de la elipse que pasa por el punto $P(2, \sqrt{3})$ y cuyo eje mayor, de 8 unidades de longitud, está sobre el eje X .

Resolución

Semieje mayor: $a = 4$

La ecuación de la elipse es de la forma $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Como $P(2, \sqrt{3})$ pertenece a la elipse:

$$\frac{4}{16} + \frac{3}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{1}{4} + \frac{3}{b^2} = 1 \rightarrow b^2 + 12 = 4b^2 \rightarrow 3b^2 = 12 \rightarrow b^2 = 4 \rightarrow b = 2$$

La ecuación de la elipse es $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$.

- 7 Halla la ecuación de la hipérbola de focos $(2, 0)$ y $(-2, 0)$, y de excentricidad 2.

Resolución

Focos: $F(2, 0)$ y $F'(-2, 0)$

Semidistancia focal: $c = 2$

$$exc = \frac{c}{a} = \frac{2}{a} = 2 \rightarrow a = 1$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$$

La ecuación de la hipérbola es $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$.