BLOQUE I: Deberás resolver 2 de los cuatro ejercicios propuestos eligiendo entre I.1 o I.2 y I.3 o I.4.

I.1.-

a) Racionaliza y simplifica la siguiente expresión: $\dfrac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{\sqrt{8}-\sqrt{27}}$.

$$\frac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{\sqrt{8}-\sqrt{27}}=\frac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{\sqrt{2^3}-\sqrt{3^3}}=\frac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-3\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-3\sqrt{3}}\cdot\frac{2\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}+3\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{4\sqrt{6}+6\sqrt{9}-6\sqrt{4}-9\sqrt{6}}{\left(2\sqrt{2}\right)^2-\left(3\sqrt{3}\right)^2}=\frac{-5\sqrt{6}+18-12}{8-27}=\frac{6-5\sqrt{6}}{-19}=\frac{5\sqrt{6}-6}{19}$$

b) Determina la expresión simplificada correspondiente al término 4º del desarrollo de la potencia $\left(\dfrac{2x^2}{3}-\dfrac{3}{2x^2}\right)^7$ y determina el valor de "x" si dicho término vale -210.

$$\xrightarrow{4^{\circ}}\binom{7}{3}\cdot\left(\frac{2x^2}{3}\right)^4\cdot\left(\frac{-3}{2x^2}\right)^3=-\frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}\cdot\frac{2^4\cdot x^8}{3^4}\cdot\frac{3^3}{2^3\cdot x^6}=-\frac{70}{3}x^2$$

$$\rightarrow -\frac{70}{3}x^2=-210\rightarrow x^2=\frac{-210\cdot3}{70}\rightarrow x^2=9\rightarrow x=\pm\sqrt{9}\rightarrow x=\pm3$$

I.2.- Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases}Log\ x-Log\ y=1\\ 2^{x-24}=4^y\end{cases}$.

$$\begin{cases}Log\ x-Log\ y=1\rightarrow Log\dfrac{x}{y}=Log\ 10\rightarrow\dfrac{x}{y}=10\rightarrow x=10y\\ 2^{x-24}=4^y\rightarrow 2^{x-24}=\left(2^2\right)^y\rightarrow 2^{x-24}=2^{2y}\rightarrow x-24=2y\rightarrow x=2y+24\end{cases}\xrightarrow{Igualación}$$

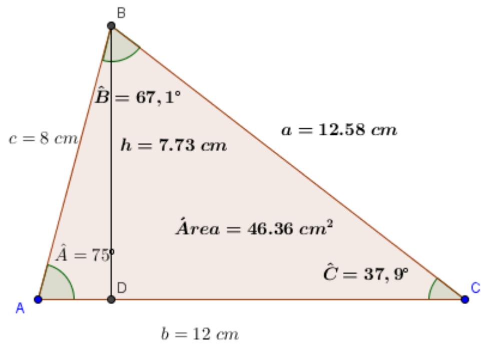
$$\rightarrow 10y=2y+24\rightarrow\rightarrow 10y-2y=24\rightarrow 8y=24\rightarrow y=\frac{24}{8}\rightarrow$$

$$\rightarrow y=3\rightarrow x=10\cdot3=30\xrightarrow{Posible\ Solución}\begin{cases}x=30\\ y=3\end{cases}$$

La solución es válida porque los logaritmos que aparecen, en la ecuación de partida son de números positivos

I.3.- De un triángulo se conoce el ángulo $\hat{A} = 75^o$ y los lados $c = 8\ cm$ y $b = 12\ cm$. Se te pide:

a) Resuelve el triángulo (calcula los valores desconocidos)



$$T.Coseno: a^2 = 12^2 + 8^2 - 2\cdot 12\cdot 8\cdot Cos\ 75^o \to$$

$$\to a = \sqrt{12^2 + 8^2 - 2\cdot 12\cdot 8\cdot Cos\ 75^o} = 12{,}58\ cm$$

$$T.Seno: \frac{12{,}58}{Sen\ 75} = \frac{12}{Sen\ \hat{B}} = \frac{8}{Sen\ \hat{C}} \to$$

$$\to Sen\ \hat{C} = \frac{8\cdot Sen\ 75^o}{12'58} \to \hat{C} = 37'90^o$$

$$\to \hat{B} = 180 - (75 + 37'9) = 67'1^o$$

b) Calcula el área de dicho triángulo.

$$Área = \frac{b\cdot h}{2} = \frac{12\cdot 7'73}{2} = 46'36\ cm^2$$

$$Sen\ 75 = \frac{h}{8} \to h = 8\cdot Sen\ 75 = 7'73\ cm$$

I.4.- Resuelve la ecuación trigonométrica: $2\cdot Sen^2 x + Cos\ 2x = 4\cdot Cos^2 x$.

$$2\cdot Sen^2 x + Cos\ 2x = 4\cdot Cos^2 x \to 2\cdot Sen^2 x + Cos^2 x - Sen^2 x = 4\cdot Cos^2 x \to$$

$$\to Sen^2 x + Cos^2 x = 4\cdot Cos^2 x \to 1 = 4\cdot Cos^2 x \to Cos^2 x = \frac{1}{4} \to Cos\ x = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2} \to$$

$$\to \begin{cases} Cos\ x = \frac{1}{2} \to \begin{cases} x = 60^o + 360^o\ k = \frac{\pi}{3} + 2\pi k\ radianes \\ x = 300^o + 360^o\ k = \frac{5\pi}{3} + 2\pi k\ radianes \end{cases} \\ Cos\ x = -\frac{1}{2} \to \begin{cases} x = 120^o + 360^o\ k = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k\ radianes \\ x = 240^o + 360^o\ k = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k\ radianes \end{cases} \end{cases}$$

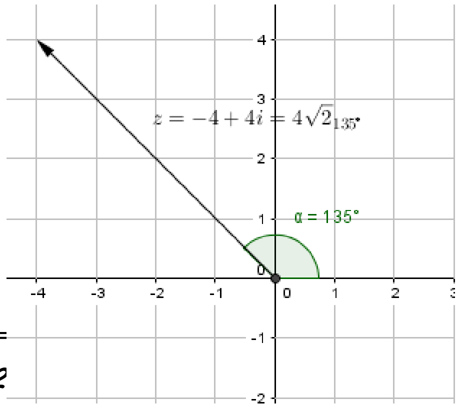
BLOQUE II. Deberás Resolver 2 de los cuatro ejercicios propuestos a elegir entre II.1 o II.4 y II.2 o II.3.

II.1.- La parte real de un número complejo es -4 y su parte imaginaria es 4. Se te pide:

a) Exprésalo en forma binómica , polar y represéntalo gráficamente.

$$z = -4 + 4i \rightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2} \\ Tan\ \alpha = \dfrac{4}{-4} = -1 \rightarrow \alpha = -45^o \xrightarrow{ç2^o} \alpha = -45 + 180 = 135^o \end{cases} \rightarrow z = 4\sqrt{2}_{135^o}$$

b) Si el complejo inicial es una de las soluciones de una ecuación de 2º grado con coeficientes reales, determina dicha ecuación. 10p



La otra solución será la conjugada es decir: $z = -4 - 4i$
La ecuación será:

$$[z - (-4 + 4i)] \cdot [z - (-4 - 4i)] = 0 \rightarrow [(z + 4) - 4i] \cdot [(z + 4) + 4i] =$$
$$\rightarrow (z + 4)^2 - (4i)^2 = 0 \rightarrow z^2 + 8z + 16 - 16i^2 = 0 \rightarrow x^2 + 8z + 32$$

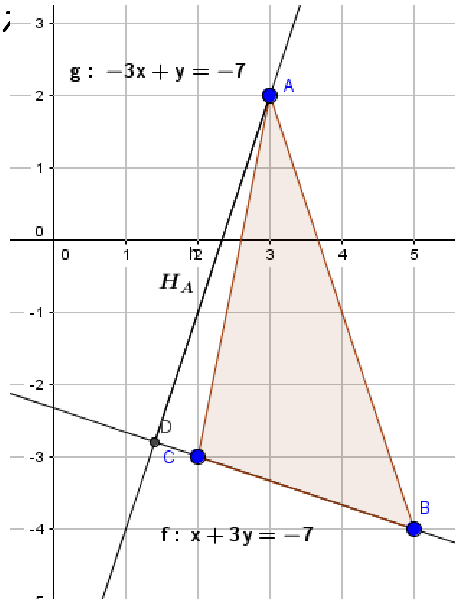
II.2.- Los puntos $A(3, 2)$, $B(5, -4)$ $C(2, -3)$ son vértices del triángulo ABC. Se te pide:

a) Determina, en forma general, la recta que determinan los puntos B y C.

$$\overrightarrow{BC}(-3, 1) \rightarrow m_{BC} = \frac{-1}{3} \rightarrow y = -4 - \frac{1}{3}(x - 5) \rightarrow y = \frac{-1}{3}x - \frac{7}{3} \rightarrow x + 3y + 7 = 0$$

b) Determina, en forma explícita, la ecuación de la altura trazada desde el vértice A

$$m_{BC} = \frac{-1}{3} \xrightarrow{\perp} m_{H_A} = 3 \rightarrow y = 2 + 3(x - 3) \rightarrow y = 3x -$$



c) El área de Dicho triángulo.

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{|BC| \cdot d(A, r_{BC})}{2} = \frac{\sqrt{10} \cdot \dfrac{16}{\sqrt{10}}}{2} = 8\ u^2$$

$$|BC| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{10}u$$

$$d(A, r_{BC}) = \frac{|1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 7|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{16}{\sqrt{10}}\ u$$

II.3.- Dados los vectores: $\vec{u}(2,\ 3)$ y el vector $\vec{v}(6,\ x)$ Se te pide:

a) Determina el valor de "x" para que ambos vectores sean:

a1) Perpendiculares: $\perp \rightarrow \vec{u}(2,\ 3)\cdot\vec{u}(6,\ x) = 0 \rightarrow 12 + 3x = 0 \rightarrow 3x = -12 \rightarrow x = -4$

a2) Paralelos: $// \rightarrow \frac{2}{6} = \frac{3}{x} \rightarrow x = \frac{6\cdot 3}{2} \rightarrow x = \frac{18}{2} \rightarrow x = 9$

b) Si el vector $\vec{p}(2,\ -1)$, expresa el vector $\vec{w}(2,\ -9)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{p}$. ¿Qué representan los valores hallados?

$$\vec{w}(2,\ -9) = a\cdot\vec{v}(2,\ 3) + b\cdot\vec{p}(2,\ -1) \rightarrow \begin{cases} 2 = 2a + 2b \rightarrow 1 = a + b \\ -9 = 3a - b \end{cases} \xrightarrow{Sumando} -8 = 4a \rightarrow$$

$$\rightarrow a = \frac{-8}{4} \rightarrow a = -2 \rightarrow 1 = -2 + b \rightarrow b = 3$$

Los valores hallados resultan ser las componentes del vector $\vec{w}$ en la base $\vec{w}(2,\ -9)$ es decir: $\vec{w}(-2,\ 3)$ en la base $\vec{w}(2,\ -9)$

c) Determina el valor de la proyección del vector $\vec{u}$ sobre el vector $\vec{p}$

$$Pr\,oyección_{\vec{p}}\ \vec{u} = |\vec{u}|\cdot Cos\ \alpha = \frac{|\vec{u}|\cdot\vec{u}\cdot\vec{p}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{p}|} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|} = \frac{2\cdot 2 + 3\cdot(-1)}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

II.4.- La ecuación de una cónica viene dada por la expresión: $6x - y^2 + 2y - 19 = 0$. Se te pide:

a) Obtén la ecuación reducida de la misma. Identifícala y defínela.

$$6x - y^2 + 2y - 19 = 0 \rightarrow 6x - 19 = y^2 - 2y \rightarrow 6x - 19 + 1 = (y^2 - 2y + 1^2) \rightarrow$$

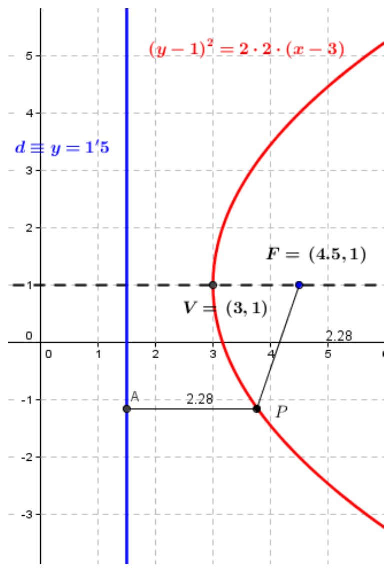
$$\rightarrow (y-1)^2 = 6(x-3) \rightarrow (y-\beta)^2 = 2\cdot p\cdot(x-\alpha) \rightarrow Parábola\ eje\ horizontal\ abierta\ Derecha$$

Definición: Dado un punto fijo, llamado Foco (F) y una recta llamada directriz (d), se define la parábola como el lugar geométrico de los puntos en los que la distancia al foco es igual a la directriz, es decir:

$$dados\begin{cases} punto\ F \\ recta\ d \end{cases} \rightarrow P(x,y)\,/\,D(P,F) = D(P,d)$$

c) Indica sus elementos y haz un esbozo de su gráfica.

$$Elementos: \begin{cases} Vértice: (3,\ 1) \\ F(3 + 1'5,\ 1) = (4'5,\ 1) \\ d \equiv x = 3 - 1'5 \rightarrow x = 1'5 \\ Eje\ simetría:\ y = 1 \end{cases}$$

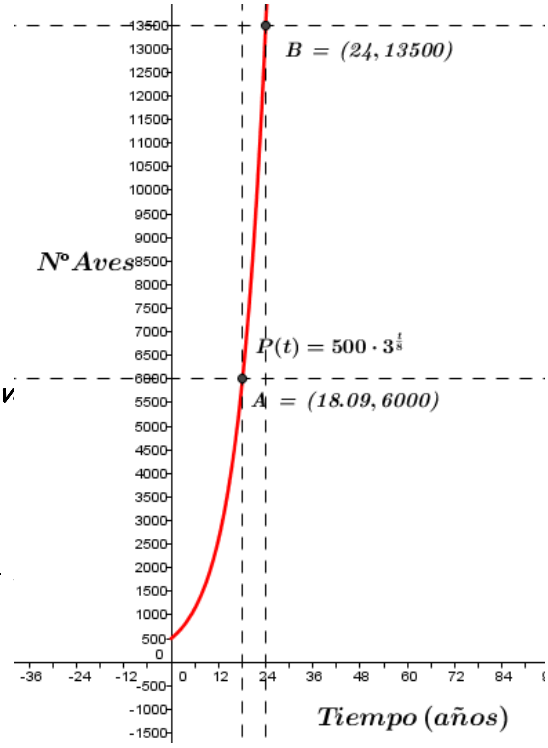


BLOQUE III. Deberás Resolver 3 de los cuatro ejercicios propuestos.

III.1.- Se sabe que la población de un tipo de ave se triplica cada 8 años. Se ha hecho un recuento y se sabe que en estos momentos hay una población de 500 ejemplares. Si llamamos P(t) al número de ejemplares que habrá cuando hayan transcurrido "t" años, se te pide:

a) Expresión que te permite calcular la población de aves en función del tiempo transcurrido en años. Realiza un esbozo de la misma.

$$P(t) = 500 \cdot 3^{\frac{t}{8}} \xrightarrow{\text{donde}} \begin{cases} P \to N^{o} \text{ de aves} \\ t \to \text{tiempo en años transcurridos} \end{cases}$$



b) Determina la población de aves que habrá cuando hayan transcurrido 24 años.

$$P(t) = 500 \cdot 3^{\frac{t}{8}} \xrightarrow{t=24e} P = 500 \cdot 3^{\frac{24}{8}} = 500 \cdot 27 = 13.500 \text{ av}$$

c) Determina el tiempo que ha de trascurrir para que el número de aves sea superior a 6.000.

$$P(t) = 500 \cdot 3^{\frac{t}{8}} \xrightarrow{P=6.000} 6.000 = 500 \cdot 3^{\frac{t}{8}} \to \frac{6.000}{500} = 3^{\frac{t}{8}} \to$$

$$\to Log\ 12 = \frac{t}{8} Log\ 3 \to t = \frac{8 Log\ 12}{log\ 3} \to t = 18,095 \text{ años}$$

III.2.- Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} ax + 3 & si\ 0 \le x < \frac{1}{2} \\ \sqrt{\frac{2x-1}{x+15}} & si\ \frac{1}{2} \le x \le 1 \\ \frac{\sqrt{x+3}-2}{2x-2} & si\ x > 1 \end{cases}$$

. Se te pide:

a) Determina el valor que deberá toma "a" para que dicha función se continua en $x = \frac{1}{2}$.

Se deberá cumplir: $f\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{x \to \frac{1}{2}} f(x)$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{2 \cdot \frac{1}{2} - 1}{\frac{1}{2} + 15}} = \sqrt{\frac{1-1}{\frac{31}{2}}} = \sqrt{\frac{0}{\frac{31}{2}}} = \sqrt{0} = 0$$

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} (ax+3) = a\frac{1}{2} + 3 = \frac{a}{2} + 3 \\ \lim_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^+} \sqrt{\frac{2x-1}{x+15}} = 0 \end{cases} \to \frac{a}{2} + 3 = 0 \to \frac{a}{2} = -3 \to a = -6$$

b) Estudia la continuidad en $x = 1$

Se deberá cumplir: $f(1) = \lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

$$f(1) = \sqrt{\frac{2 \cdot 1 - 1}{1 + 15}} = \sqrt{\frac{2 - 1}{16}} = \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} \sqrt{\dfrac{2x - 1}{x + 15}} = \dfrac{1}{4} \\ \\ \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{\sqrt{x + 3} - 2}{2x - 2} = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{2\left(\sqrt{x + 3} + 2\right)} = \dfrac{1}{2\left(\sqrt{1 + 3} + 2\right)} = \dfrac{1}{8} \end{cases} \to \nexists \lim_{x \to 1} f(x)$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{\sqrt{x + 3} - 2}{2x - 2}$$

$\downarrow$ *RG*

$$\frac{\sqrt{1 + 3} - 2}{2 - 2} = \frac{0}{0}\ IND \to \frac{\sqrt{x + 3} - 2}{2(x - 1)} = \frac{\sqrt{x + 3} - 2}{2(x - 1)} \cdot \frac{\sqrt{x + 3} + 2}{\sqrt{x + 3} + 2} = \frac{x + 3 - 4}{2(x - 1) \cdot \left(\sqrt{x + 3} + 2\right)} =$$

$$= \frac{x - 1}{2(x - 1) \cdot \left(\sqrt{x + 3} + 2\right)} = \frac{1}{2\left(\sqrt{x + 3} + 2\right)}$$

Conclusión: ***$f(x)$ en $x = 1$ la función es discontinua inevitable de salto finito.***

III.3.-

a) Dada las función: $y = \left(Sen^2 x \cdot e^{3x}\right)^{\frac{\ln(5x)}{4x-5}}$. Determina su función derivada aplicando la derivación logarítmica.

$$y = \left(Sen^2 x \cdot e^{3x}\right)^{\frac{\ln(5x)}{4x-5}} \to$$

$$y' = \left(Sen^2 x \cdot e^{3x}\right)^{\frac{\ln(5x)}{4x-5}} \cdot \left\{ \frac{\dfrac{(4x - 5)}{x} + 4 \ln(5x)}{(4x - 5)^2} \cdot \left[2Ln(Sen\ x) - 3x\right] + \frac{\ln(5x)}{4x - 5} \cdot (2Tan\ x - 3) \right\}$$

$$Ln\ y = \frac{\ln(5x)}{4x - 5} \cdot \left[2Ln(Sen\ x) - 3x\right] \to$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{\dfrac{5}{5x}(4x - 5) + \ln(5x) \cdot 4}{(4x - 5)^2} \cdot \left[2Ln(Sen\ x) - 3x\right] + \frac{\ln(5x)}{4x - 5} \cdot \left(\frac{2Cos\ x}{Sen\ x} - 3\right)$$

b) Calcula: $\lim_{x\to 5}\left(\frac{2x}{x+5}\right)^{\frac{1}{x-5}}$ e interpreta geométricamente el significado.

$$\lim_{x\to 5}\left(\frac{2x}{x+5}\right)^{\frac{1}{x-5}} = e^{\lim_{x\to 5}\left[\frac{1}{x-5}\cdot\left(\frac{2x}{x+5}-1\right)\right]} = e^{\lim_{x\to 5}\frac{1}{x+5}} = e^{\frac{1}{5+5}} = e^{\frac{1}{10}} \to Punto\_Hueco\_en: \left(5,\ e^{\frac{1}{10}}\right)$$

$\downarrow RG$

$$\left(\frac{2\cdot 5}{5+5}\right)^{\frac{1}{5-5}} = \left(\frac{10}{10}\right)^{\frac{1}{0}} = 1^{\infty} \to IND\ n^{o}\ e$$

$$\frac{1}{x-5}\cdot\left(\frac{2x}{x+5}-1\right) = \frac{1}{x-5}\cdot\left(\frac{2x-x-5}{x+5}\right) = \frac{1}{x-5}\cdot\left(\frac{x-5}{x+5}\right) = \frac{1}{x+5}$$

III.4. Dada la función $y=\frac{4x^2}{(x+2)^2}$ cuya derivada primera es $y'=\frac{16x}{(x+2)^3}$ y su segunda derivada es $y''=\frac{-32x+32}{(x+1)^4}$. Determina:

a) Dominio y corte con ejes.

Se trata de una función racional el dominio estará formado por todos lo valores menos los que anulen el denominador, es decir:

$(x+2)^2=0 \to x+2=0 \to x=-2 \to D=\Re-\{-2\}$

Cortes con los ejes:

Abscidas: $y=0 \to 4x^2=0 \to x=0 \to (0,\ 0)$.

Ordenadas: $x=0 \to y=\frac{4\cdot 0^2}{(0+2)^2}=0 \to (0,\ 0)$

b) Las ecuaciones de las asíntotas y sus posiciones respecto a la gráfica.

A. Vertical: Si la hay la habrá en $x=-2$, deberá ocurrir que $\lim_{x\to -2} f(x)=\pm\infty$

$$\lim_{x\to -2} f(x) = \lim_{x\to -2}\frac{4x^2}{(x+2)^2} = \pm\infty \xrightarrow{Posición} \begin{cases} \lim_{x\to -2^-}\frac{4x^2}{(x+2)^2} = \frac{+}{+}\infty = +\infty \\ \lim_{x\to -2^+}\frac{4x^2}{(x+2)^2} = \frac{+}{+}\infty = +\infty \end{cases} \to x=-2\ A.Vertical$$

$\downarrow R.G.$

$$\frac{4\cdot(-2)^2}{(-2+2)^2} = \frac{16}{0} = \pm\infty$$

A. Horizontal: debe ocurrir que : $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = l\ n^{o}\ Finito$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x^2}{(x+2)^2} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x^2}{x^2+4x+4} = 4\ n^{o}\ Finito \to y=4\ A.Horizontal$$

$\downarrow RG$

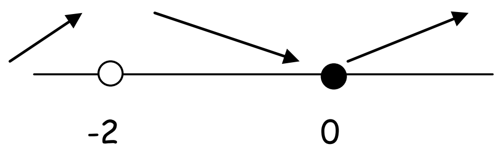
$$\frac{\infty}{\infty} = \frac{4x^2}{x^2} = 4$$

$$\xrightarrow{Posición} \begin{cases} \lim_{x\to -\infty}\left(\frac{4x^2}{x^2+4x+4}-4\right) = \lim_{x\to -\infty}\frac{4x^2-4x^2-16x-16}{x^2+4x+4} = \lim_{x\to -\infty}\frac{-16x-16}{x^2+4x+4} = \frac{+}{+}0 = 0^{+}(encima) \\ \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{4x^2}{x^2+4x+4}-4\right) = \lim_{x\to +\infty}\frac{4x^2-4x^2-16x-16}{x^2+4x+4} = \lim_{x\to +\infty}\frac{-16x-16}{x^2+4x+4} = \frac{+}{+}0 = 0^{+}(encima) \end{cases}$$

c) Monotonía (crecimientos) y localiza los máximos/mínimos si los hubiera.

Deberemos estudiar el signo de la 1ª derivada:

$$y' = \frac{16x}{(x+2)^3} \rightarrow P.C. \rightarrow 16x = 0 \rightarrow x = 0 \text{ Posible } M - m$$



$$(-\infty, -2) \xrightarrow{x=-10} y' = \frac{-}{-} = + \rightarrow \textit{Crece}$$

$$(-2, 0) \xrightarrow{x=-1} y' = \frac{-}{+} = - \rightarrow \textit{Decrece}$$

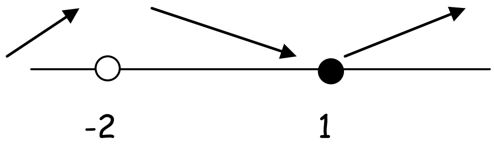
$$(0, \infty) \xrightarrow{x=+10} y' = \frac{+}{+} = + \rightarrow \textit{Crece}$$

Hay un mínimo en $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow \textit{Mínimo}(0, 0)$

d) Curvatura y puntos de inflexión si los hay.

Deberemos estudiar el signo de la 2ª derivada:

$$y'' = \frac{-32x + 32}{(x+2)^4} \rightarrow P.C. \rightarrow -32x + 32 = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow \text{Posible } P.\text{Inflexión}$$



$$(-\infty, -2) \xrightarrow{x=-10} y'' = \frac{-}{+} = - \rightarrow \textit{Convexa}$$

$$(-2, 1) \xrightarrow{x=0} y' = \frac{+}{+} = + \rightarrow \textit{Cóncava}$$

$$(1, \infty) \xrightarrow{x=+10} y' = \frac{-}{+} = - \rightarrow \textit{Convexa}$$

Hay Punto de inflexión: $x = 1 \rightarrow y = \frac{4}{9} \rightarrow PI\left(1, \frac{4}{9}\right)$

e) Con los datos obtenidos, realiza la gráfica correspondiente a la función.