I.E.S. TIERRA ESTELLA **MATEMÁTICAS 1º BACH "A-B"**

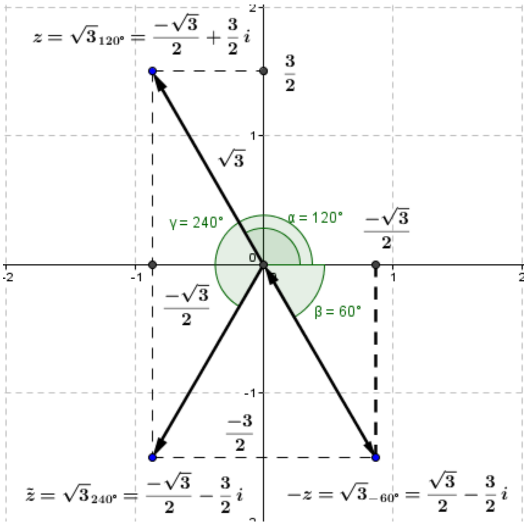
Complejos, Vectores y Recta I **27/01/2017** **NOTA**

Nombre:

NOTA: Cada paso que des en los ejercicios deberá ir convenientemente comentado y/o razonado.

1.-Dado el complejo $z = \sqrt{3}_{120^\circ}$. Se te pide:

a) Expresa dicho complejo en forma binómica y represéntalo, de forma aproximada en el plano complejo adjunto



$$z = \sqrt{3}_{120^\circ} = \sqrt{3} \cdot (Cos\ 120^\circ + i \cdot Sen\ 120^\circ) =$$

$$= \sqrt{3} \cdot (-Cos\ 60 + i \cdot Sen\ 60) = \sqrt{3} \cdot \left(-\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$

$$= \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$$

b) Determina las expresiones de los complejos opuesto y conjugado del complejo z , represéntalos gráficamente y calcula el complejo resultante de realizar la operación $\frac{(\bar{z})^3}{(-z)^2}$. Expresa el resultado en forma binómica.

$$-z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i = \sqrt{3}_{-60^\circ} \qquad \bar{z} = \frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i = \sqrt{3}_{240^\circ}$$

$$\frac{(\bar{z})^3}{(-z)^2} = \frac{\left(\sqrt{3}_{240}\right)^3}{\left(\sqrt{3}_{-60}\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}_{720}}{3_{-120}} = \sqrt{3}_{840} = \sqrt{3}_{120} = \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} \cdot i$$

c) Si el complejo z , resulta ser una de las soluciones de una ecuación de 2º grado con coeficientes reales obtén dicha ecuación de 2º grado.

La otra solución será el conjugado es decir:

$$\begin{cases} z_1 = \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} \cdot i \\ z_1 = \frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2} \cdot i \end{cases} \xrightarrow{Ecuación} \left[z - \left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} \cdot i\right)\right] \cdot \left[z - \left(\frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2} \cdot i\right)\right] = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\left(z + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{3}{2}i\right] \cdot \left[\left(z + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{3}{2}i\right] = 0 \rightarrow \left(z + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}i\right)^2 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow z^2 + \sqrt{3} \cdot z + \frac{3}{4} - \frac{9}{4}i^2 = 0 \rightarrow z^2 + \sqrt{3} \cdot z + 3 = 0$$

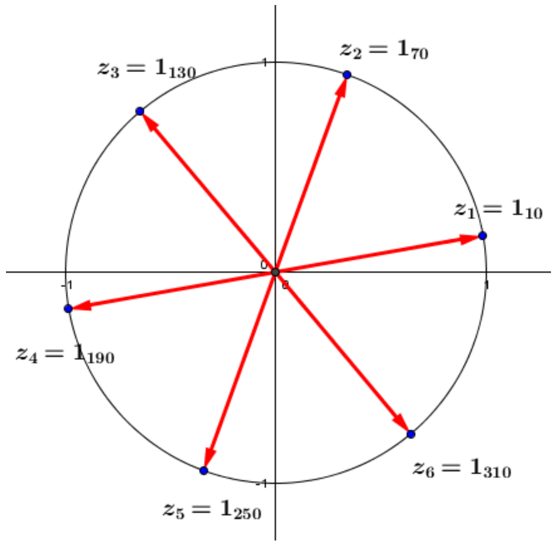
d) Si dicha ecuación fuera $z^2 + \sqrt{3}z + 3 = 0$. Determina sus soluciones en el campo de los números complejos.

$$z^2 + \sqrt{3}z + 3 = 0 \rightarrow z = \frac{-\sqrt{3} \pm \sqrt{3-12}}{2} = \frac{-\sqrt{3} \pm \sqrt{-9}}{2} = \frac{-\sqrt{3} \pm \sqrt{9}\cdot\sqrt{-1}}{2} = \frac{-\sqrt{3} \pm 3\cdot i}{2}$$

2.- Determina y representa las soluciones de la ecuación:

$$z = \sqrt[6]{\frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i}{-i}} = \sqrt[6]{\frac{1_{-30}}{1_{-90}}} = \sqrt[6]{1_{60}} =$$

$$= 1_{\frac{60+360k}{6}} = \begin{cases} k = 0 \rightarrow z_1 = 1_{10} \\ k = 1 \rightarrow z_2 = 1_{70} \\ k = 2 \rightarrow z_3 = 1_{130} \\ k = 3 \rightarrow z_4 = 1_{190} \\ k = 4 \rightarrow z_5 = 1_{250} \\ k = 5 \rightarrow z_6 = 1_{310} \end{cases}$$

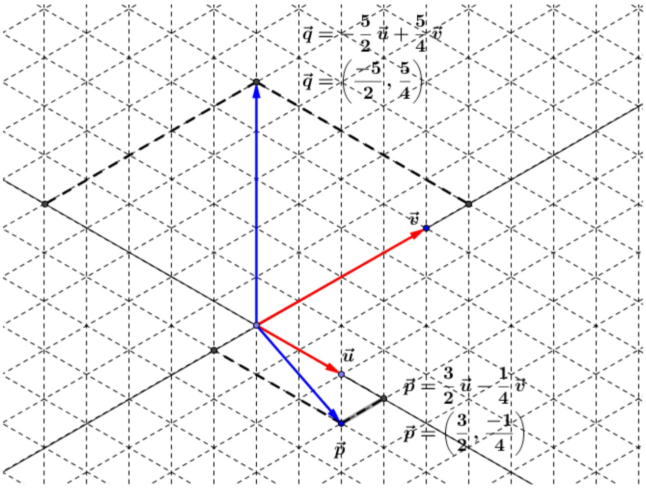


$$a = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \rightarrow \begin{cases} |a| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1 \\ Tan\ \alpha = \frac{\frac{-1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-\sqrt{3}}{3} \rightarrow \alpha = -30 \rightarrow Sí \end{cases} \rightarrow a = 1_{-30}$$

$$-i = 1_{-90}$$

3.- En la figura adjunta, considera los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Se te pide:

a) ¿Forman ambos vectores una base en el plano, razona la respuesta. En caso afirmativo ¿Será la base ORTOGONAL? Y ¿ORTONORMAL?.



- *Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ forman una base porque tienen distinta dirección (pertenecen a rectas no paralelas).*
- *La base NO es Ortogonal porque dichos vectores no son perpendiculares.*
- *La base NO es Ortonormal porque ni son perpendiculares ni tienen módulo 1 (tienen distinto módulo.*

b) Expresa los vectores $\vec{p}$ y $\vec{q}$ como combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ e indica las coordenadas que tendrán los vectores $\vec{p}$ y $\vec{q}$ en la base $B\{\vec{u}, \vec{v}\}$.

$$\vec{p} = \frac{3}{2}\vec{u} - \frac{1}{4}\vec{v} \xrightarrow{\text{Coordenadas}} \vec{p} = \left(\frac{3}{2}, \frac{-1}{4}\right)$$

$$\vec{q} = -\frac{5}{2}\vec{u} + \frac{5}{4}\vec{v} \xrightarrow{\text{Coordenadas}} \vec{q} = \left(\frac{-5}{2}, \frac{5}{4}\right)$$

4.-

a) Sean los vectores $\vec{a}(3, p)$ y $\vec{b}(q, -2)$ referidos a una base ortonormal. y *"q"* en los siguientes casos:

a_1) Calcular los valores de *"p"* para que el módulo de $\vec{a}$ sea 5.

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{3^2 + p^2} = 5 \rightarrow 9 + p^2 = 25 \rightarrow p^2 = 25 - 9 \rightarrow p = \pm\sqrt{16} \rightarrow a = \pm 4 \rightarrow \begin{cases} \vec{p}(3, 4) \\ \vec{p}(3, -4) \end{cases}$$

a_2) Establecer las relación que debe existir (sistema de ecuaciones sin resolver) entre *"p"* y *"q"* para que los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sean perpendiculares y además tengan el mismo módulo.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a} \perp \vec{b} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \rightarrow (3, p) \cdot (q, -2) = 0 \rightarrow 3p - 2q = 0 \rightarrow p = \frac{2}{3}q \\ \left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right| \rightarrow \sqrt{3^2 + p^2} = \sqrt{q^2 + (-2)^2} \rightarrow 9 + p^2 = q^2 + 4 \rightarrow 5 + p^2 = q^2 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow 5 + \left(\frac{2}{3}q\right)^2 = q^2 \rightarrow\rightarrow 5 + \frac{4}{9}q^2 = q^2 \rightarrow 5 = \frac{5}{9}q^2 \rightarrow q^2 = 9 \rightarrow q = \pm 3 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} q = 3 \rightarrow p = \frac{2}{3} \cdot 3 = 2 \\ q = -3 \rightarrow p = \frac{2}{3} \cdot (-3) = -2 \end{cases} \begin{cases} \vec{a}(3, 2);\ \vec{b}(3, -2) \\ \vec{a}(3, -2);\ \vec{b}(-3, -2) \end{cases}$$

b) Dados los vectores $\vec{u}(4,-2)$ y $\vec{v}(5,1)$., se te pide:

b$_1$) Determina el valor de la proyección del vector $\vec{v}$ sobre el $\vec{u}$.

$$Proy_{\vec{u}}\vec{v} = |\vec{v}| \cdot Cos\,(\vec{u},\vec{v}) = |\vec{v}| \cdot \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{4\cdot 5 - 2\cdot 1}{\sqrt{4^2+(-2)^2}} = \frac{18}{\sqrt{20}} = \frac{18}{2\sqrt{5}} = \frac{9\sqrt{5}}{5}$$

b$_2$) Expresa el vector $\vec{p}(7,7)$ como combinación lineal de ellos. ¿Qué representan los valores hallados en el apartado anterior?.

$$\vec{p}(7,7) = x\cdot(4.-2) + y\cdot(5,1) \rightarrow \begin{cases} 7 = 4x+5y \rightarrow 7 = 4x + 5\cdot(7+2x) \rightarrow 7 = 14x+35 \xrightarrow{\quad * \quad} \\ 7 = -2x + y \rightarrow y = 7+2x \leftarrow y = 7 + 2\cdot(-2) = 3 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[*]{\quad} -28 = 14x \rightarrow x = \frac{-28}{14} = -2$$

$$\vec{p}(7,7) = -2\cdot(4.-2) + 3\cdot(5,1)$$

Los valores hallados son las componentes del vector $\vec{w}$ en la base $B(\vec{u},\vec{v})$, es decir: $\vec{w}(-2,3)$ en la base $B(\vec{u},\vec{v})$.

5.- Los puntos $A(1,0)$, $B(2,3)$, $C(5,4)$ y el punto $D(a,b)$, son los vértices de l rombo ABCD. Se te pide:

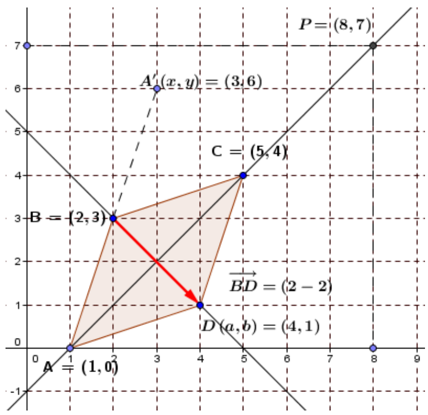
a) Determina las coordenadas del punto D.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \rightarrow (1,3) = (5-a,\,4-b) \rightarrow \begin{cases} 1 = 5-a \rightarrow a = 4 \\ 3 = 4-b \rightarrow b = 2 \end{cases} \rightarrow D(4,1)$$

b) Las coordenadas del punto simétrico de A respecto de B.

El punto B será el punto medio de A y su simétrico A', es decir:

$$\left.\begin{matrix} A(1,0) \\ B(2,3) \\ A'(x,y) \end{matrix}\right\} \rightarrow \begin{matrix} 2 = \dfrac{1+x}{2} \rightarrow 4 = 1+x \rightarrow x = 3 \\ 3 = \dfrac{0+y}{2} \rightarrow 6 = 0+y \rightarrow y = 6 \end{matrix} \rightarrow A'(3,6)$$



d) Determina las coordenada de un punto $P(8,z)$ para que esté alineado con los puntos A y C.

$$\left.\begin{matrix} A(1,0) \\ C(5,4) \\ P(8,z) \end{matrix}\right\} \rightarrow \begin{matrix} \overrightarrow{AC}(4,4) \\ \overrightarrow{AP}(7,z) \end{matrix} \xrightarrow{Alineados} \frac{4}{7} = \frac{4}{z} \rightarrow z = 7 \rightarrow P(8,7)$$

e) Un vector director de la diagonal BD del rombo ABCD.

$$\left.\begin{matrix} B(2,3) \\ D(4,1) \end{matrix}\right\} \rightarrow \vec{V}_{BD} = \overrightarrow{BD} = (2,-2)$$