I.E.S. TIERRA ESTELLA MATEMÁTICAS 1º BACH "A-B"

Global 2ª Ev: Compl., Vect., Geo.Anal y Cónicas 03/02/2018 NOTA

Nombre:

Pi

NOTA: Cada paso que des en los ejercicios deberá ir convenientemente comentado y/o razonado.

1.-

a) Obtén la ecuación de 2º grado que tiene por soluciones: $z_1 = -4 - 4\sqrt{3}i$ y $z_2 = -4 + 4\sqrt{3}i$. *0,75p*

$$\left[z - \left(-4 - 4\sqrt{3}i\right)\right] \cdot \left[z - \left(-4 + 4\sqrt{3}i\right)\right] = 0 \rightarrow \left[(z+4) + 4\sqrt{3}i\right] \cdot \left[(z+4) - 4\sqrt{3}i\right] = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow (z+4)^2 - \left(4\sqrt{3}i\right)^2 = 0 \rightarrow z^2 + 8z + 16 - 48i^2 = 0 \rightarrow z^2 + 8z + 16 + 48 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow z^2 + 8z + 64 = 0$$

b) Resuelve en el campo de los números complejos la ecuación: $z^2 + 8z + 64 = 0$. *0,25p*

$$z^2 + 8z + 64 = 0 \rightarrow z = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 256}}{2} = \frac{-8 \pm \sqrt{-192}}{2} = \frac{-8 \pm \sqrt{192} \cdot \sqrt{-1}}{2} =$$

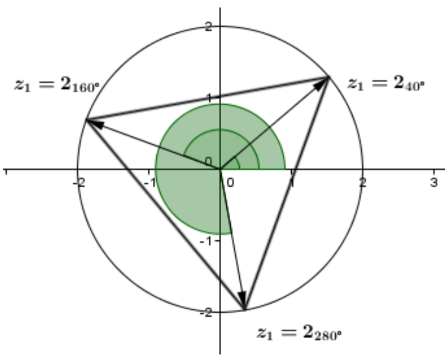
$$= \frac{-8 \pm 8\sqrt{3} \cdot i}{2} = -4 \pm 4\sqrt{3} \cdot i$$

c) Calcula $\sqrt[3]{-4 + 4\sqrt{3} \cdot i}$. Dibuja las soluciones en el plano adjunto. Si unes los afijos de las soluciones ¿Qué figura obtienes? *1p*

Pongamos $-4 + 4\sqrt{3} \cdot i$ en forma polar:

$$\begin{cases} |z| = \sqrt{(-4)^2 + \left(4\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{16 + 48} = \sqrt{64} = 8 \\ Tan\ \alpha = \dfrac{4\sqrt{3}}{-4} = -\sqrt{3} \xrightarrow{Cal} \alpha = -60 \xrightarrow{NO} \alpha = -60 + 180 = 120^\circ \end{cases} \rightarrow z_2 = 8_{120^\circ}$$

$$\sqrt[3]{-4 + 4\sqrt{3} \cdot i} = \sqrt[3]{8_{120}} = \sqrt[3]{8}_{\frac{120 + 360k}{3}} \rightarrow \begin{cases} k = 0 \rightarrow z_1 = 2_{40^\circ} \\ k = 1 \rightarrow z_2 = 2_{160^\circ} \\ k = 2 \rightarrow z_3 = 2_{280^\circ} \end{cases}$$



Un triángulo equilátero.

2.- Dados los puntos $A(-3,\ 1)$, $B(2,\ 3)$ y el vector $\vec{u}(-1,\ -3)$. Se te pide:

a) Los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\vec{u}$. Forman base. Razónalo de forma analítica y compruébalo gráficamente. *0,25p*

Serán base si tienen distinta dirección. Gráficamente no están en rectas paralelas.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}(5,\ 2)\\ \\ \vec{u}(-1,\ -3)\end{array}\right\}\xrightarrow{\neq \text{Dirección}} \frac{5}{-1} \neq \frac{2}{-3} \rightarrow \text{CIERTO} \rightarrow \text{Forman base}$$

b) Calcula el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\vec{u}$. *0,75p*

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\vec{u}\right|} = \frac{-11}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{10}} \rightarrow \alpha = 130{,}24^{\circ}$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u} = (5,\ 2)\cdot(-1,\ -3) = 5\cdot(-1) + 2\cdot(-3) = -5-6 = -11$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{5^2+2^2} = \sqrt{29}\ : \qquad \left|\vec{u}\right| = \sqrt{1^2+(-3)^2} = \sqrt{10}$$

c) Si el punto $C(4,\ k)$, determina el valor de "k" para que este alienado con A y B. *0,5p*

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}(5,\ 2)\\ \\ \overrightarrow{AC}(7,\ k-1)\end{array}\right\}\xrightarrow{=\text{Dirección}} \frac{5}{7} = \frac{2}{k-1} \rightarrow 5k-5 = 14 \rightarrow k = \frac{19}{5}$$

d) Calcula el punto simétrico de A respecto a B. *0,5p*

B será el punto medio de AA', es decir:

$$\left.\begin{array}{l}A(-3,\ 1)\\ B(2,\ 3)\\ A'(a,\ b)\end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l}2 = \dfrac{-3+a}{2} \rightarrow a = 7\\ \\ 3 = \dfrac{1+b}{2} \rightarrow a = 5\end{array}\right. \rightarrow A'(7,\ 5)$$

e) Determina un vector unitario y perpendicular a $\vec{u}(-1,\ -3)$. *0,5p*

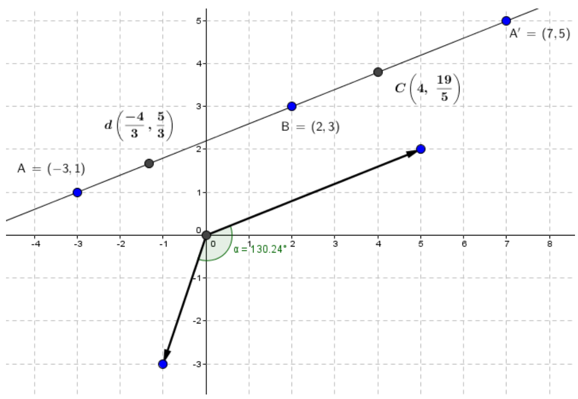
$$\vec{u}(-1,\ -3) \perp (3,\ -1) \xrightarrow{\text{Unitario}} \frac{1}{\sqrt{3^3+(-1)^2}}(3,\ -1) = \left(\frac{3\sqrt{10}}{10},\ \frac{-\sqrt{10}}{10}\right)$$

f) Calcula el punto D, más próximo al punto A que resulta al dividir el segmento AB en tres partes iguales. *0,5p*

$$D(x,\ y) \rightarrow \overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AD} \rightarrow$$

$$\rightarrow (5,2) = 3(x+3,\ y-1) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l}5 = 3x+9 \rightarrow x = \dfrac{-4}{3}\\ \\ 2 = 3y-3 \rightarrow x = \dfrac{5}{3}\end{array}\right. \rightarrow D\left(\frac{-4}{3},\ \frac{5}{3}\right)$$



3.- Los puntos $A(2,-2)$, $B(-1,2)$ y $C(1,6)$ son los vértices del triángulo ABC. Se te pide:

a) Determina la ecuación, en forma general, del la recta que determinan los puntos A y B. *0,75p*

$$\left.\begin{array}{l} A(2,-2) \\ \\ B(-1,2) \end{array}\right\} \rightarrow \vec{V}_r = \overrightarrow{AB}(-3,4) \rightarrow m_r = \frac{-4}{3} \xrightarrow{P.P.} y = -2 - \frac{4}{3}\cdot(x-2) \rightarrow$$

$$\rightarrow y = -2 - \frac{4}{3}x + \frac{8}{3} \rightarrow \frac{3y}{3} = \frac{-6-4x+8}{3} \rightarrow 3y = -6 - 4x + 8 \rightarrow r_{AB} \equiv 4x + 3y - 2 = 0$$

b) Distancia del punto "C" a la recta "r". *0,5p*

$$d(C,r) = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|4\cdot 1 + 3\cdot 6 - 2|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{20}{5} = 4\ u$$

c) Área del triángulo ABC. *0,5p*

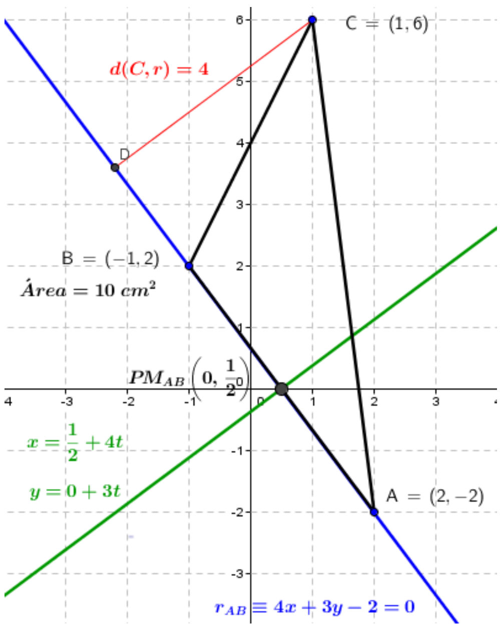
$$Área = \frac{b\cdot h}{2} = \frac{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot d(C,r)}{2} = \frac{5\cdot 4}{2} = 10\ u^2$$

$$\overrightarrow{AB} = (-3,4) \rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-3)^2+4^2} = 5$$

d) Determina la mediatriz, en forma paramétrica, del segmento AB. *0,75p*

Hay que hallar la perpendicular a la recta r por el punto medio de AB.

$$\left.\begin{array}{l} PM_{AB} = \left(\frac{2-1}{2}, \frac{-2+2}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, 0\right) \\ \\ \overrightarrow{AB}(-3,4) \perp \vec{V}_{mzAB}(4,3) \rightarrow m_{mzAB} = \frac{3}{4} \end{array}\right\} \xrightarrow{P.P.E} \left\{\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} + 4t \\ \\ y = 0 + 3t \end{array}\right.$$



4.- Si la ecuación de una cónica responde a la siguiente expresión:

$$36y^2 + 100x^2 - 144y + 800x - 1856 = 0 .$$

Se te pide:

a) Expresar en forma reducida dicha expresión. 0,75p

$$36y^2 + 100x^2 - 144y + 800x - 1856 = 0 \rightarrow 36 \cdot (y^2 - 4y + ...) + 100 \cdot (x^2 + 8x + ...) = 1856 \rightarrow$$

$$\rightarrow 36 \cdot (y^2 - 4y + 2^2) + 100 \cdot (x^2 + 8x + 4^2) = 1856 + 36 \cdot 2^2 + 100 \cdot 4^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow 36 \cdot (y-2)^2 + 100 \cdot (x+4)^2 = 3600 \rightarrow \frac{(y-2)^2}{\frac{3600}{36}} + \frac{(x+4)^2}{\frac{3600}{100}} = 1 \rightarrow \frac{(y-2)^2}{100} + \frac{(x+4)^2}{36} = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{(y-2)^2}{10^2} + \frac{(x+4)^2}{6^2} = 1$$

b) Dada la ecuación: $\frac{(y-2)^2}{100} + \frac{(x+4)^2}{36} = 1$. Identifica la cónica y defínela. 0,5p

Se trata de una Elipse de eje principal vertical (mayor denominador la y).

Definición: Dados dos puntos fijos llamados focos (F y F') y valor "K" llamado constante de la elipse, se define la elipse como el lugar geométrico de los puntos tales que la suma de las distancia de los puntos a los focos es igual a la constante de la elipse.

$$P(x, y) / |d(P, F) + d(P, F')| = k$$

c) Determina sus elementos y haz, en el plano cartesiano adjunto un esbozo de la misma. 1p

$C(-4, 2)$

$$\left.\begin{array}{l} a = 10 \\ \\ b = 6 \end{array}\right\} \rightarrow c = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} < 1$$

Vértices, Focos y ejes en dibujo adjunto.