I.E.S. TIERRA ESTELLA MATEMÁTICAS 1º BACH "A-B"

Global 3ª Evaluación 24/05/2017 NOTA

Nombre:

1.- Calcula, uno de, los límites de las siguientes funciones:

a)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{3x^2-x+2}-\sqrt{3x^2+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-x+1}{\sqrt{3x^2-x+2}+\sqrt{3x^2+1}}=\frac{-\sqrt{3}}{3}$$

$$\downarrow RG \qquad\qquad \downarrow RG \to \frac{-\infty}{\infty+\infty}\ IND \xrightarrow{Grados=} \frac{-x}{x\sqrt{3}+x\sqrt{3}}=\frac{-1}{2\sqrt{3}}=\frac{-\sqrt{3}}{6}$$

$$\infty-\infty \to IND. \to \left(\sqrt{3x^2-x+2}-\sqrt{3x^2+1}\right)\cdot\frac{\left(\sqrt{3x^2-x+2}+\sqrt{3x^2+1}\right)}{\left(\sqrt{3x^2-x+2}+\sqrt{3x^2+1}\right)}=$$

$$\frac{3x^2-x+2-3x^2-1}{\left(\sqrt{3x^2-x+2}-\sqrt{3x^2+1}\right)}=\frac{-x+1}{\sqrt{3x^2-x+2}+\sqrt{3x^2+1}}$$

b)

$$\lim_{x\to-1}\left(\frac{x-1}{3x+1}\right)^{\frac{1}{x+1}}=e^{\lim\limits_{x\to-1}\left[\left(\frac{x-1}{3x+1}-1\right)\cdot\frac{1}{x+1}\right]}=e^{\lim\limits_{x\to-1}\left[\frac{x-1-3x-1}{3x+1}.\cdot\frac{1}{x+1}\right]}=e^{\lim\limits_{x\to-1}\left[\frac{-2x-2}{3x+1}.\cdot\frac{1}{x+1}\right]}=e^{\lim\limits_{x\to-1}\left[\frac{-2(x+1)}{3x+1}.\cdot\frac{1}{x+1}\right]}=$$

$$\downarrow$$

$$\left(\frac{-1-1}{-3+1}\right)^{\frac{1}{-1+1}}=\left(\frac{-2}{-2}\right)^{\frac{1}{0}}=1^{\infty}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to-1}\left[\frac{-2}{3x+1}\right]}=e^{\frac{-2}{-3+1}}=e^{\frac{-2}{-2}}=e$$

2.- Dada la función: $y = \begin{cases} ax + 3 & si\ x < \frac{1}{2} \\ \frac{2x-1}{\sqrt{x+15}} & si\ \frac{1}{2} \le x \le 3 \\ \frac{x-4}{x^2-4x} & si\ x > 3 \end{cases}$. Se te pide:

a) Determina el valor de "a" para que la función sea continua en $x = \frac{1}{2}$. Para el resto de valores ¿Cómo será la función?.

Será continua si se cumple: $f\left(\frac{1}{2}\right) = \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} f(x)$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} - 1}{\sqrt{\frac{1}{2} + 15}} = \frac{0}{\sqrt{\frac{31}{2}}} = 0$$

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} (ax + 3) = \frac{a}{2} + 3 \\ \lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^+} \frac{2x-1}{\sqrt{x+15}} = \frac{0}{\sqrt{\frac{1}{2} + 15}} = 0 \end{cases} \to \exists \lim_{x \to \frac{1}{2}} f(x)\ si\ \frac{a}{2} + 3 = 0 \to a = -6$$

Para $a = -6$ será continua, si $a \neq -6$, D.I.S.F. (límites laterales distintos).

b) Para $a = -6$, estudia la continuidad de la función resultante en 3 y en 4:

$$y = \begin{cases} -6x + 3 & si\ x < \frac{1}{2} \\ \frac{2x-1}{\sqrt{x+15}} & si\ \frac{1}{2} \le x \le 3 \\ \frac{x-4}{x^2-4x} & si\ x > 3 \end{cases}.$$

Continuidad en $x = 3$

$$f(3) = \frac{2 \cdot 3 - 1}{\sqrt{3+15}} = \frac{5}{\sqrt{18}}$$

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 3^-} \frac{2x-1}{\sqrt{x+15}} = \frac{5}{\sqrt{18}} \\ \lim\limits_{x \to 3^+} \frac{x-4}{x^2-4x} = \frac{3-4}{9-12} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3} \end{cases} \to \nexists \lim_{x \to 3} f(x)\ D.I.S.F.$$

Continuidad en $x = 4$

$$\left. \begin{array}{l} f(4) = \frac{4-4}{16-16} = \frac{0}{0} \to \nexists f(4) \\ \lim\limits_{x \to 4} f(x) = \lim\limits_{x \to 4} \frac{x-4}{x \cdot (x-4)} = \lim\limits_{x \to 4} \frac{1}{x} = \frac{1}{4} \end{array} \right\} \to D.E.P.H.$$

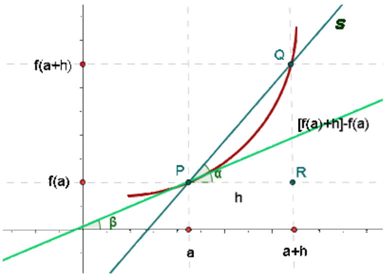
3.- Dada la función $f(x) = (4x - 3)^2$. Se te pide:

a) Concepto e interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto.

<u>DEFINICIÓN:</u>

La derivada de una función en un punto $A(a,\ f(a))$ es: $f'(a) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

<u>SIGNIFICADO GEOMÉTRICO:</u>



La derivada de una función en un punto $A(a, f(a))$ es: la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en dicho punto, esto es la tangente del ángulo que forma dicha recta con la horizontal.

$$f'(a) = m_{recta\_tan\,gente} = Tag\ \beta$$

b) Determina su función derivada aplicando la definición.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h \cdot (32x + 16h - 24)}{h} = \lim_{h \to 0} (32x + 16h - 24) = 32x - 24$$

$$f(x) = (4x - 3)^2 = 16x^2 - 24x + 9$$

$$f(x+h) = 16 \cdot (x+h)^2 - 24(x+h) + 9 = 16 \cdot (x^2 + 2xh + h^2) - 24x - 24h + 9 =$$

$$= 16x^2 + 32xh + 16h^2 - 24x - 24h + 9$$

$$f(x+h) - f(x) = 32xh + 16h^2 - 24h = h \cdot (32x + 16h - 24)$$

c) Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de dicha función en $x = 1$

La ecuación de dicha recta será: $y = f(1) + f'(1) \cdot (x - 1)$

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = (4 \cdot 1 - 3)^2 = 1^2 = 1 \\ f'(1) = 32 \cdot 1 - 24 = 8 \end{array}\right\} \xrightarrow{R.Tangente} y = 1 + 8 \cdot (x - 1) \to y = 8x - 7$$

4.- Aplicando las reglas de derivación, determina la función derivada correspondiente a las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{\left(Cos^2 3x - e^{5x}\right)}{Arc\,tan\left(x^2 - 4x\right)}$

$$y' = \frac{\left[2 \cdot Cos\ 3x \cdot (-\,Sen\ 3x) \cdot 3 - 5 \cdot e^{5x}\right] \cdot Arc\,tan\left(x^2 - 4x\right) - \left(Cos^2 3x - e^{5x}\right) \cdot \dfrac{2x - 4}{1 + \left(x^2 - 4x\right)^2}}{\left[Arc\,tan\left(x^2 - 4x\right)\right]^2}$$

b)

$$y = \left(\sqrt[3]{\frac{\left(x^3 - 3x^2\right)}{2x - 3}}\right)^{3x^2 - 2x} \xrightarrow{Ln} Ln\ y = \frac{3x^2 - 2x}{3} \cdot \left[Ln\left(x^3 - 3x^2\right) - Ln(2x - 3)\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{6x - 2}{3} \cdot Ln\left(\frac{x^3 + 3x^2}{2x - 3}\right) + \frac{3x^2 - 2x}{3} \cdot \left(\frac{3x^2 - 6x}{x^3 - 3x^2} - \frac{2}{2x - 3}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow y' = \left(\sqrt[3]{\frac{\left(x^3 - 3x^2\right)}{2x - 3}}\right)^{x^2 \cdot Ln\,(3x - 5)} \cdot \left[\frac{6x - 2}{3} . Ln\left(\frac{x^3 + 3x^2}{2x - 3}\right) + \frac{3x^2 - 2x}{3} \cdot \left(\frac{3x^2 - 6x}{x^3 - 3x^2} - \frac{2}{2x - 3}\right)\right]$$

5.- Dada la función $y = \dfrac{x^2 - 3x}{x + 1}$, siendo su 1ª derivada $y' = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{(x + 1)^2}$ y su 2ª derivada $y'' = \dfrac{8}{(x + 1)^3}$. Se te pide:

a) Determina su dominio y corte con los ejes.

Dominio

$$y = \frac{x^2 - 3x}{x + 1} \xrightarrow{F.Racional} x + 1 \neq 0 \rightarrow x \neq -1 \rightarrow D = \Re - \{-1\}$$

Corte ejes:

Abscisas:

$$y = 0 \rightarrow x^2 - 3x = 0 \rightarrow x \cdot (x - 3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow (0,\ 0) \\ x - 3 = 0 \rightarrow x = 3 \rightarrow (3,\ 0) \end{cases}$$

Ordenadas:

$$x = 0 \rightarrow \frac{0^2 - 3 \cdot 0}{0 + 1} = \frac{0}{1} = 0 \rightarrow (0,\ 0)$$

b) Determina sus Asíntotas:

A.V.: Si la hay la habrá en $x+1=0 \rightarrow x=-1$, además el límite en ese punto debe ser infinito.

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-3x}{x+1}=\pm\infty \xrightarrow{Posición} \begin{cases} \lim_{x\to -1^-}\dfrac{x^2-3x}{x+1}=\dfrac{+}{-}\infty=-\infty \\ \lim_{x\to -1^+}\dfrac{x^2-3x}{x+1}=\dfrac{+}{+}\infty=+\infty \end{cases}$$

$\downarrow RG$

$$\frac{(-1)^2-3\cdot(-1)}{-1+1}=\frac{4}{0}=\pm\infty$$

A.H.: No hay Grado Num > Grado Den.

A.O.: Sí la hay Grado Num > Grado Den + 1, será de la forma: $y=mx+n$.

Cálculo de "m":

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x}{x^2+x}=1$$

Cálculo de "n":

$$n=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-3x}{x+1}-1\cdot x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-3x-x^2-x}{x+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-4x}{x+1}\right)=-4$$

La asíntota tendrá por ecuación: $y=x-4$

Para estudiar la posición deberemos que calcular: $\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-3x}{x+1}-(x-4)\right)$

$$\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{x^2-3x-x^2-x+4x+4}{x+1}\right)=\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{4}{x+1}\right)=\frac{+}{-}0=0^- \rightarrow Por\ debajo$$

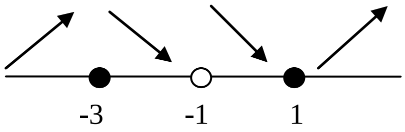
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4}{x+1}\right)=\frac{+}{+}0=0^+ \rightarrow Por\ encima$$

c) Estudia su monotonía y localiza en su caso los máximos y mínimos relativos.

El crecimiento se estudia con el signo de la 1º derivada, es decir: $y'=\dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$. Los puntos críticos son los valores que anulan el numerador y el denominador, es decir:

$$x^2+2x-3=0 \rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{-2\pm 4}{2}=\begin{cases}\dfrac{-2+4}{2}=1 \\ \dfrac{-2-4}{2}=-3\end{cases} \rightarrow Posibles\ Máx-Mín$$

$$(x+1)^2=0 \rightarrow x+1=0 \rightarrow x=-1\ \nexists f(-1)$$



$$\left(-\infty,\,-3\right)\xrightarrow{x=-10} y'=\frac{+}{+}=+>0 \rightarrow \textit{Crece}$$
$$\left(-3,\,-1\right)\xrightarrow{x=-2} y'=\frac{-}{+}=-<0 \rightarrow \textit{Decrece}$$
$$\left(-1,\,1\right)\xrightarrow{x=0} y'=\frac{-}{+}=-<0 \rightarrow \textit{Decrece}$$
$$\left(1,\,\infty\right)\xrightarrow{x=10} y'=\frac{+}{+}=+>0 \rightarrow \textit{Crece}$$

Máximo en: $x=-3 \rightarrow y=\dfrac{(-3)^2-3\cdot(-3)}{-3+1}=\dfrac{18}{-2}=-9 \rightarrow M(-3,\,-9)$

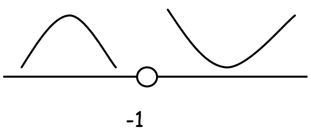
Mínimo en: $x=1 \rightarrow y=\dfrac{(1)^2-3\cdot(1)}{1+1}=\dfrac{-2}{2}=-1 \rightarrow m(1,\,-1)$

d) Estudia su curvatura y localiza en su caso los puntos de inflexión.

La curvatura se estudia con el signo de la 2ª derivada, es decir: $y''=\dfrac{8}{(x+1)^3}$. Los puntos críticos son los valores que anulan el numerador y el denominador, es decir:

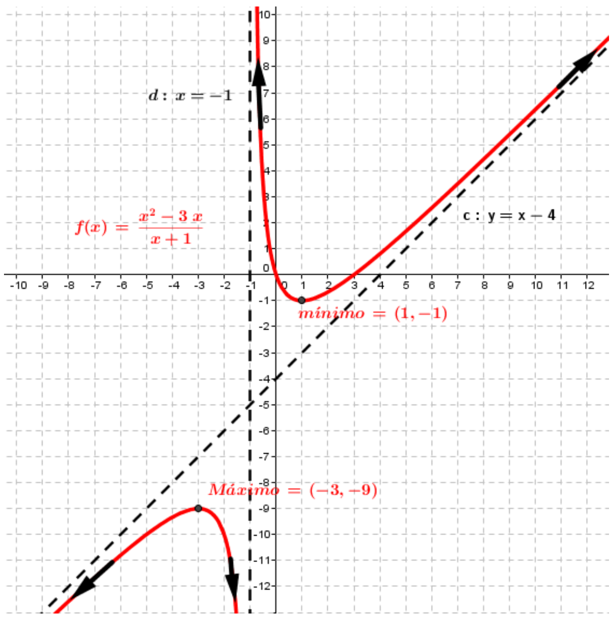
$8=0 \rightarrow NUNCA \rightarrow$ No hay puntos de inflexión.

$x+1=0 \rightarrow x=-1\ \nexists \textit{función}$



$$\left(-\infty,\,-1\right)\xrightarrow{x=-10} y''=\frac{+}{-}=-<0 \rightarrow \textit{Convexa}\ \cap$$
$$\left(-1,\,\infty\right)\xrightarrow{x=0} y'=\frac{+}{+}=+>0 \rightarrow \textit{Cóncava}\ \cup$$

e) Realiza un esbozo de la gráfica e indica su Recorrido.



$$\textit{Re corrido}:\ \left(-\infty,\,-9\right]\cup\left[-1,\,\infty\right)$$