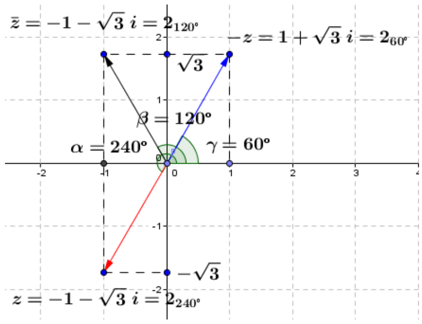
I.E.S. TIERRA ESTELLA MATEMÁTICAS 1º BACH "A-B"

Complejos, Vectores y Recta I 19/01/2018 NOTA

Nombre:

NOTA: Cada paso que des en los ejercicios deberá ir convenientemente comentado y/o razonado.

1.-Dado el complejo $z = -1 - \sqrt{3}i$. Se te pide:



a) Expresa dicho complejo en forma polar y represéntalo, en el plano complejo adjunto.

$$\begin{cases} |z| = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2 \\ Tan\ \alpha = \dfrac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3} \xrightarrow{Calc} \alpha = 60 \xrightarrow{N=} \alpha = 240^\circ \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow z = 2_{240^\circ}$$

b) Determina las expresiones de los complejos opuesto y conjugado del complejo z, represéntalos gráficamente y calcula el complejo resultante de realizar la operación $\dfrac{(-z)^3}{(\bar{z})^2}$. Expresa el resultado en forma binómica.

$$-z = 1 + \sqrt{3}i = 2_{60^\circ} \qquad \bar{z} = -1 - \sqrt{3}i = 2_{120^\circ}$$

$$\frac{(-z)^3}{(\bar{z})^2} = \frac{(2_{60})^3}{(2_{120})^2} = \frac{8_{180}}{4_{240}} = 2_{-60} = 2 \cdot [Cos(-60) + i \cdot Sen(-60)] = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 - \sqrt{3}i$$

c) Si el complejo z, resulta ser una de las soluciones de una ecuación de 2º grado con coeficientes reales obtén dicha ecuación de 2º grado.

La otra solución será el conjugado es decir:

$$\begin{cases} z_1 = -1 - \sqrt{3} \cdot i \\ z_2 = -1 + \sqrt{3} \cdot i \end{cases} \xrightarrow{Ecuación} \left[z - \left(-1 - \sqrt{3} \cdot i\right)\right] \cdot \left[z - \left(-1 + \sqrt{3} \cdot i\right)\right] = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[(z+1) + \sqrt{3}i\right] \cdot \left[(z+1) - \sqrt{3}i\right] = 0 \rightarrow (z+1)^2 - \left(\sqrt{3}i\right)^2 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow z^2 + 2z + 1 - 3i^2 = 0 \rightarrow z^2 + 2z + 4 = 0$$

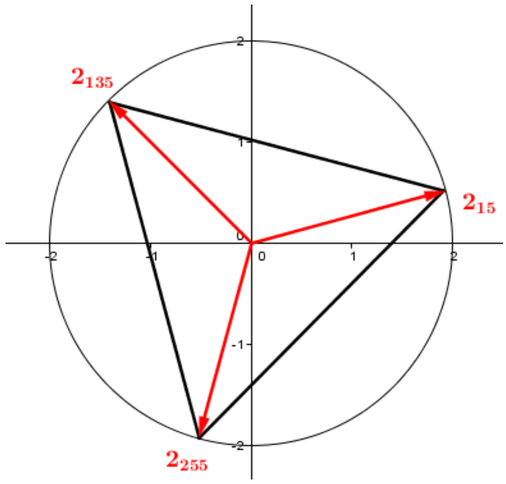
d) Si dicha ecuación fuera $z^2 + 2z + 4 = 0$. Determina sus soluciones en el campo de los números complejos.

$$z = \frac{-2 \pm \sqrt{4-16}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{12} \cdot \sqrt{-1}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3} \cdot i}{2} = -1 \pm \sqrt{3} \cdot i$$

2.- Determina y representa las soluciones de la ecuación:

$$z^3 + \frac{8\sqrt{2}}{i-1} = 0 \leftarrow z = \sqrt[3]{\frac{-8\sqrt{2}}{i-1}} = \sqrt[3]{\frac{8\sqrt{2}_{\,180^\circ}}{\sqrt{2}_{\,135}}} = \sqrt[3]{8_{45}}$$

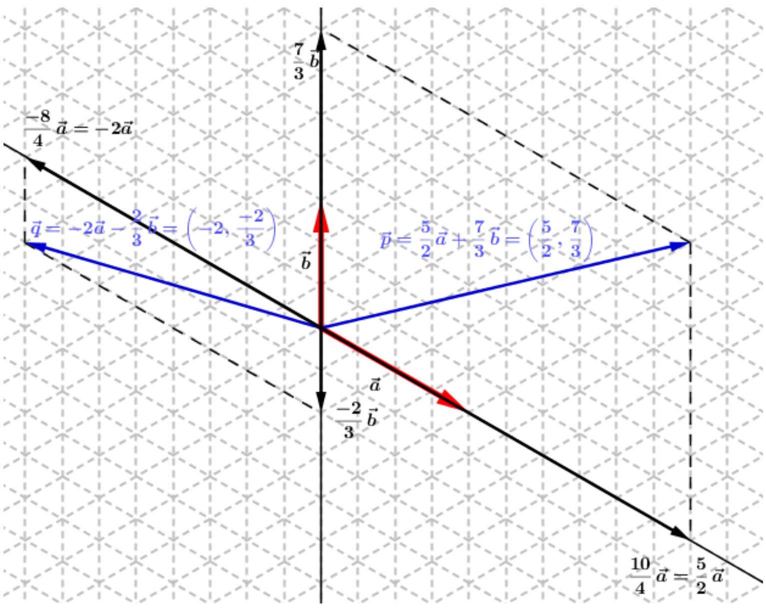
$$= 2_{\frac{45+360k}{3}} = \begin{cases} k = 0 \to z_1 = 2_{15} \\ k = 1 \to z_2 = 2_{135} \\ k = 2 \to z_3 = 2_{255} \end{cases}$$



$$\begin{cases} -8\sqrt{2} = 8\sqrt{2}_{\,180^\circ} \\ i-1 \to \begin{cases} |a| = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2} \\ Tan\ \alpha = \dfrac{1}{-1} = -1 \to \alpha = -45 \to no \to \alpha = 135^\circ \end{cases} \to \sqrt{2}_{\,135^\circ} \end{cases}$$

3.- En la figura adjunta, considera los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ del plano. Se te pide:

a) ¿Forman ambos vectores una base en el plano, razona la respuesta. En caso afirmativo ¿Será la base ORTOGONAL? Y ¿ORTONORMAL?.



- ***Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ forman una base porque tienen distinta dirección (pertenecen a rectas no paralelas).***
- ***La base NO es Ortogonal porque dichos vectores no son perpendiculares.***
- ***La base NO es Ortonormal porque ni son perpendiculares ni tienen módulo 1 (tienen distinto módulo.***

b) Expresa los vectores $\vec{p}$ y $\vec{q}$ como combinación lineal de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ e indica las coordenadas que tendrán los vectores $\vec{p}$ y $\vec{q}$ en la base $B\{\vec{u}, \vec{v}\}$. Deberás hacerlo gráficamente ayudándote de la figura.

$$\vec{p} = \frac{5}{2}\vec{a} + \frac{7}{3}\vec{b} \xrightarrow{Coordenadas} \vec{p} = \left(\frac{5}{2}, \frac{7}{3}\right)$$

$$\vec{q} = -2\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b} \xrightarrow{Coordenadas} \vec{q} = \left(-2, \frac{-2}{3}\right)$$

4.-

a) Sean los vectores $\vec{u}(-x,\ 4)$ y $\vec{v}(2,\ y)$ referidos a una base ortonormal.

a₁) Calcular los valores de *"x"* para que el módulo de $\vec{u}$ sea 8.

$$\left|\vec{u}\right| = \sqrt{(-x)^2 + 4^2} = 8 \to x^2 + 16 = 64 \to x^2 = 64 - 16 \to x = \pm\sqrt{48} \to$$

$$\to x = \pm\sqrt{2^4 \cdot 3} \to x = \pm 2^2\sqrt{3} \to x = \pm 4\sqrt{3} \to \begin{cases} \vec{u}\left(-4\sqrt{3},\ 4\right) \\ \vec{u}\left(4\sqrt{3},\ 4\right) \end{cases}$$

a₂) Establecer las relación que debe existir (***sistema de ecuaciones sin resolver***) entre *"x"* y *"y"* para que el producto escalar de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ valga 4 y además que el módulo de $\vec{u}$ sea el doble que el de $\vec{v}$.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u}\cdot\vec{v} = 4 \to (-x,\ 4)\cdot(2,\ y) = 4 \to -2x + 4y = 4 \to x = 2y - 2 \\ \left|\vec{u}\right| = 2\left|\vec{v}\right| \to \sqrt{(-x)^2 + 4^2} = 2\cdot\sqrt{2^2 + y^2} \to x^2 + 16 = 4\left(4 + y^2\right) \to \\ \to x^2 + 16 = 16 + y^2 \to x^2 = y^2 \end{array}\right\} \to \begin{array}{c} x = 2y - 2 \\ x^2 = y^2 \end{array}$$

$$\to (2y-2)^2 = y^2 \to 4y^2 + 4 - 8y = y^2 \to 3y^2 - 8y + 4 = 0 \to y = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{6} =$$

$$= \frac{-8 \pm \sqrt{16}}{6} = \frac{-8 \pm 4}{6} = \begin{cases} y_1 = \dfrac{8+4}{6} = \dfrac{12}{6} = 2 \to x = 2\cdot 2 - 2 = 4 - 2 = 2 \\ y_2 = \dfrac{8-4}{6} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3} \to x = 2\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right) - 2 = \dfrac{4}{3} - 2 = \dfrac{-2}{3} \end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} \vec{u}(-2,\ 4);\ \vec{v}(2,\ 2) \\ \vec{u}\left(\dfrac{2}{3},\ 4\right);\ \vec{v}\left(2,\ \dfrac{2}{3}\right) \end{cases}$$

b) Dados los vectores $\vec{a}(-2,\ -3)$ y $\vec{b}(1,\ -5)$., se te pide:

b₁) Determina el valor de la proyección del vector $\vec{a}$ sobre el $\vec{b}$.

$$Proy_{\vec{b}}\,\vec{a} = \left|\vec{a}\right|\cdot Cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \left|\vec{a}\right|\cdot\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|} = \frac{(-2)\cdot 1 + (-3)\cdot(-5)}{\sqrt{1^2 + (-5)^2}} =$$

$$= \frac{-2 + 15}{\sqrt{1 + 25}} = \frac{13}{\sqrt{26}} = \frac{13\sqrt{26}}{26} = \frac{\sqrt{26}}{2}$$

b2) Expresa el vector $\vec{w}(8,-1)$ como combinación lineal de ellos ($\vec{a}$ y $\vec{b}$). ¿Qué representan los valores hallados en el apartado anterior?.

$$\vec{w}(8,-1)=x\cdot(-2,-3)+y\cdot(1,-5)\rightarrow\begin{cases}8=-2x+y\rightarrow y=8+2x\\ -1=-3x-5y\rightarrow -1=-3x-5(8+2x)\rightarrow\end{cases}$$

$$\rightarrow -1=-3x-40-10x\rightarrow 13x=-39\rightarrow x=\frac{-39}{13}=-3\rightarrow y=8+2\cdot(-3)=2$$

$$\vec{w}(8,-1)=-3\cdot(-2,-3)+2\cdot(1,-5)$$

Los valores hallados son las componentes del vector $\vec{w}$ en la base $B(\vec{a},\vec{b})$, es decir: $\vec{w}(-3,2)$ en la base $B(\vec{a},\vec{b})$.

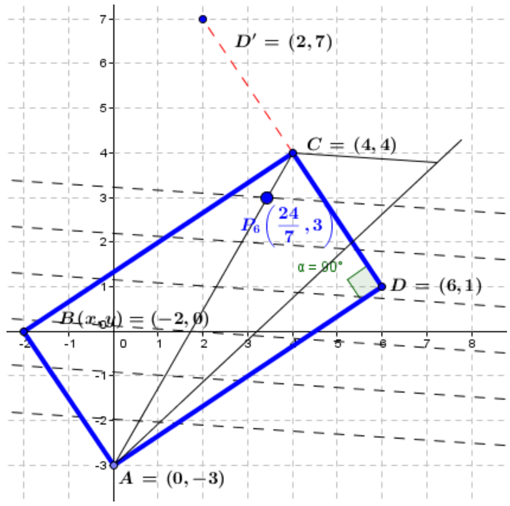
5.- Los puntos $A(0,-3)$, $B(x,y)$, $C(4,4)$ y $D(6,1)$, son los vértices del rectángulo ABCD. Se te pide:

Determina analíticamente SIEMPRE:

a) Las coordenadas del punto ***D***.

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(x,y+3)\\ \overrightarrow{DC}=(-2,3)\end{cases}\rightarrow(x,y+3)=(-2,3)\rightarrow$$

$$\rightarrow\begin{cases}x=-2\\ y+3=3\rightarrow y=0\end{cases}\rightarrow D(-2,0)$$



b) Las coordenadas del punto simétrico de D respecto de C.

El punto C será el punto medio de D y su simétrico D', es decir:

$$\left.\begin{array}{l}D(6,1)\\ C(4,4)\\ D'(a,b)\end{array}\right\}\rightarrow\begin{array}{l}4=\dfrac{6+a}{2}\rightarrow 8=6+a\rightarrow a=2\\ 4=\dfrac{1+b}{2}\rightarrow 8=1+b\rightarrow b=7\end{array}\rightarrow D'(2,7)$$

c) Determina las coordenada de un punto $P(z,-1)$ para que esté alineado con los puntos A y D.

$$\left.\begin{array}{l}A(0,-3)\\ D(6,1)\\ P(z,-1)\end{array}\right\}\rightarrow\begin{array}{l}\overrightarrow{AD}(6,4)\\ \overrightarrow{AP}(z,2)\end{array}\xrightarrow{Alineados}\frac{6}{z}=\frac{4}{2}\rightarrow 12=4z\rightarrow z=3\rightarrow P(3,-1)$$

d) ¿Cuanto medirá el ángulo $\hat{D}$?. Razona la respuesta. A continuación, determina el valor de dicho ángulo. *0,5p*

1ª) ***Como se trata de un rectángulo deberá medir 90º es decir se trata de un ángulo recto.***

2ª) ***El producto escalar de los vectores $\overrightarrow{DA}$ y $\overrightarrow{DC}$ debe ser cero:***

$$\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} = 0 \rightarrow \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} = (-6) \cdot (-2) + (-4) \cdot 3 = 12 - 12 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} A(0,-3) \\ C(4,4) \\ D(6,1) = \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} \overrightarrow{DA} = (-6,-4) \\ \overrightarrow{DC}(-2,3) \end{array}$$

$$Cos\ \hat{D} = \frac{\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC}}{|\overrightarrow{DA}| \cdot |\overrightarrow{DC}|} = \frac{(-6) \cdot (-2) + (-4) \cdot 3}{2\sqrt{13} \cdot \sqrt{13}} = \frac{12 - 12}{26} = \frac{0}{26} = 0 \rightarrow \hat{D} = 90^o$$

$$\left.\begin{array}{l} A(0,-3) \\ C(4,4) \\ D(6,1) = \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} \overrightarrow{DA} = (-6,-4) \rightarrow |\overrightarrow{DA}| = \sqrt{(-6)^2 + (-4)^2} = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} \\ \overrightarrow{DC}(-2,3) = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13} \end{array}$$

e) Si dividimos el segmento $\overline{AC}$ en 7 partes, determina las coordenadas del punto más cercano a C que obtendremos.

$$\left.\begin{array}{l} A(0,-3) \\ P_6(a,b) \\ C(4,4) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \overrightarrow{AP_6} = (a, b+3) \\ \overrightarrow{AC} = (4,7) \end{array} \rightarrow \frac{\overrightarrow{AP_6}}{\overrightarrow{AC}} = \frac{6}{7} \rightarrow 7 \cdot \overrightarrow{AP_6} = 6 \cdot \overrightarrow{AC} \rightarrow 7 \cdot (a, b+3) = 6 \cdot (4,7) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} 7a = 24 \rightarrow a = \dfrac{24}{7} \\ 7b + 21 = 42 \rightarrow 7b = 21 \rightarrow b = \dfrac{21}{7} = 3 \end{array}\right. \rightarrow P_6 = \left(\frac{24}{7}, 3\right)$$