***Nota**: Recuerda que un examen también podría ser tu "carta de presentación". Resuelve con orden y limpieza lo que se te pida. Explica lo que estás haciendo. Y lee bien los enunciados.*

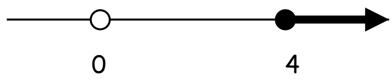
1.- Clasifica y determina el dominio de la siguiente función: $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-4}{x^2}}$ *(1 p)*

$f(x) = \sqrt{\dfrac{x-4}{x^2}}$. Se trata de una función irracional de índice par con "x" en el denominador.

Por lo tanto se ha de cumplir: $\begin{cases} \dfrac{x-4}{x^2} \geq 0 \to Re\ lleno \\ x^2 \neq 0 \to x \neq 0 \to Doble\_Hueco \end{cases}$.

Procedamos hallando los puntos críticos del numerador y denominador de la fracción:

$$P.C. \to \begin{cases} x-4=0 \to x=4 \to P.\,Re\ lleno \\ x^2=0 \to x=0 \to P.Hueco\ y\ doble \end{cases}$$



$$\left.\begin{array}{l} (-\infty, 0) \xrightarrow{-10} \dfrac{-}{+} = - < 0 \to No \\ (0, 4] \xrightarrow{2} \dfrac{-}{+} = - < 0 \to No \\ [4, \infty) \xrightarrow{10} \dfrac{+}{+} = + > 0 \to Sí \end{array}\right\} \to D \to \begin{cases} [-4, \infty) \\ \{x \in R \,/\, x \geq 4\} \end{cases}$$

2.- Dada la función $y = Ln(3x-1)$ se te pide:

a) Calcula su función recíproca. *(0'5 p)*

$$y = Ln(3x-1) \xrightarrow{x \leftrightarrow y} x = Ln(3y-1) \xrightarrow{Def.} e^x = 3y - 1 \to y = \frac{e^x+1}{3}$$

$$y = Ln(3x-1) \to y^{-1} = \frac{e^x+1}{3}$$

b) Compruébalo: *(0'5 p)*

Se deberá cumplir: $y \circ y^{-1}(x) = y^{-1} \circ y(x) = x$

$$y \circ y^{-1}(x) = x \to y\left(\frac{e^x+1}{3}\right) = Ln\left(3 \cdot \frac{e^x+1}{3} - 1\right) = Ln\ e^x = x \cdot Ln\ e = x$$

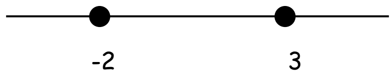
$$y^{-1} \circ y(x) = x \to y^{-1}(ln(3x-1)) = \frac{e^{ln(3x-1)}+1}{3} = a \to e^{ln(3x-1)} = 3a - 1 \to$$

$$\to Lne^{ln(3x-1)} = Ln(3a-1) \to Ln(3x-1) = Ln(3a-1) \to a = x$$

3.-

a) Dada la función $f(x) = |x-3| + |2x+4|$, exprésala como función a trozos. *(0'75p)*

Hallamos los puntos críticos: $\begin{cases} x-3=0 \to x=3 \\ 2x+4=0 \to x=2 \end{cases}$



$$(-\infty,-2) \xrightarrow{-10} \begin{cases} x-3=-10-3=-13<0 \to |x-3| = 3-x \\ 2x+4 = 2\cdot(-10)+4 = -16 < 0 \to |2x+4| = -2x-4 \end{cases} \xrightarrow{+} y = -3x-1$$

$$(-2,3) \xrightarrow{0} \begin{cases} x-3=0-3=-3<0 \to |x-3| = 3-x \\ 2x+4 = 2\cdot(0)+4 = 4 > 0 \to |2x+4| = 2x+4 \end{cases} \xrightarrow{+} y = x+7$$

$$(3,\infty) \xrightarrow{10} \begin{cases} x-3=10-3=7>0 \to |x-3| = x-3 \\ 2x+4 = 2\cdot(10)+4 = 24 > 0 \to |2x+4| = 2x+4 \end{cases} \xrightarrow{+} y = 3x+1$$

$\to$

$$\to f(x) = \begin{cases} -3x-1 \text{ si } x \le -2 \\ x+7 \text{ si } -2 < x < 3 \\ 3x+1 \text{ si } x \ge 3 \end{cases}$$

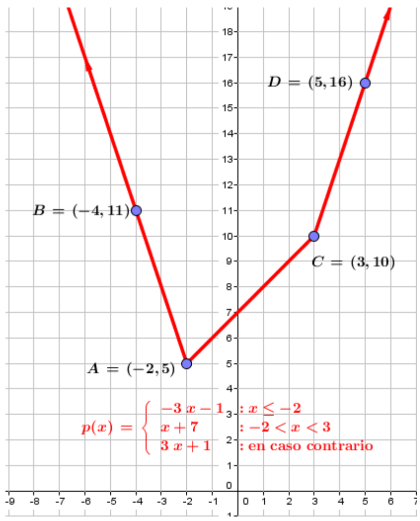
b) Si la función anterior fuera: $f(x) = \begin{cases} -3x-1 \text{ si } x \le -2 \\ x+7 \text{ si } -2 < x < 3 \\ 3x+1 \text{ si } x \ge 3 \end{cases}$. Represéntala gráficamente e indica su dominio y recorrido. *0'75p*

$$f(x) = \begin{cases} -3x-1 \text{ si } x \le -2 \\ x+7 \text{ si } -2 < x < 3 \\ 3x+1 \text{ si } x \ge 3 \end{cases}$$

	●	●
x	-4	-2
y	+11	+5

	○	○
x	-2	+3
y	++5	+10

	●	●
x	+3	+5
y	+10	+16

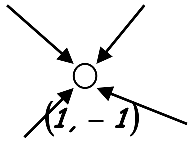


$D = (-\infty, +\infty)$

$R = [5, \infty)$

4.- Calcula los siguientes límites de funciones e interpreta gráficamente el resultado obtenido. (3 ***p)***

a)



$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x-3}=-1$$

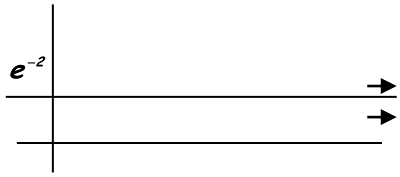
$$\downarrow RG \qquad \xrightarrow{RG}\frac{1+1}{1-3}=\frac{2}{-2}=-1$$

$$\frac{1^2-1}{1^2-4+3}=\frac{0}{0}$$

$$\left.\begin{aligned} x^2-1&=(x+1)\cdot(x-1)\\ x^2-4x+3&=(x-1)\cdot(x-3)\end{aligned}\right\}\to\frac{x^2-1}{x^2-4x+3}=\frac{(x+1)\cdot(x-1)}{(x-1)\cdot(x-3)}=\frac{x+1}{x-3}$$

$$x=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\frac{4\pm 2}{2}=\begin{cases}x=3\to x-3\\ x=1\to x-1\end{cases}$$

b)

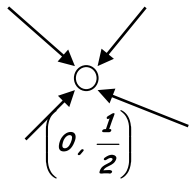


$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{-2x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(\frac{x+1}{x}-1\right)\cdot(-2x)\right]}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(\frac{x+1-x}{x}\right)\cdot(-2x)\right]}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2x}{x}}=e^{-2}$$

$$\downarrow RG$$

$$(1)^{-\infty}\to IND\ n^{o}\ e$$

c)



$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}}=\frac{1}{2}$$

$$\vdots\downarrow RG \qquad \xrightarrow{RG}\frac{2}{\sqrt{4+0}+\sqrt{4-0}}=\frac{2}{2+2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{\sqrt{4+0}-\sqrt{4-0}}{0}=\frac{2-2}{0}=\frac{0}{0}$$

$$\frac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{x}=\frac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{x}\cdot\frac{\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}}{\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}}=\frac{4+x-4-x}{x\cdot\left(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}\right)}=$$

$$=\frac{2x}{x\cdot\left(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}\right)}=\frac{2}{\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}}$$

5.-

a) Define continuidad de una función en un punto. *0'5p*

Una función es continua en un punto de abscisa $x = x_o$, si se cumple que:

1. Existe función en ese punto. $\exists f(x_o)$
2. Existe límite en ese punto. $\exists \lim\limits_{x \to x_o} f(x)$
3. Ambos valores coinciden. $f(x_o) = \lim\limits_{x \to x_o} f(x)$

b) Dada la función: $f(x) = \begin{cases} 3x + b & si\ x < -2 \\ 4 & si\ -2 \leq x \leq 3 \\ ax - 2 & si\ x > 3 \end{cases}$. Determina el valor que deberán tomar los parámetros "a" y "b" para que esa función sea continua en todo su dominio. *1p*

Se trata de una función a trozos (3) polinómica dominio todo R, habrá que estudiar la continuidad en los puntos de cambio.

Continuidad en $x = -2 \xrightarrow{se\,deberá\ cumplir} f(-2) = \lim\limits_{x \to -2} f(x)$.

$f(-2) = 4$

$$\lim_{x \to -2} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to -2^-} (3x + b) = 3 \cdot (-2) + b = -6 + b \\ \\ \lim\limits_{x \to -2^+} 4 = 4 \end{cases} \rightarrow -6 + b = 4 \rightarrow b = 10$$

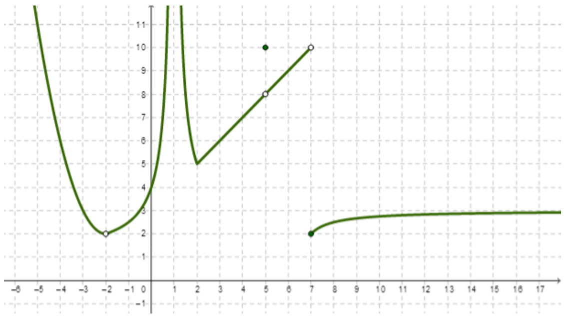
4

Continuidad en $x = 3 \xrightarrow{se\,deberá\ cumplir} f(3) = \lim\limits_{x \to 3} f(x)$.

$f(3) = 4$

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 3^-} 4 = 4 \\ \\ \lim\limits_{x \to -3^+} (ax - 2) = a \cdot (3) - 2 \end{cases} \rightarrow 4 = 3a - 2 \rightarrow 3a = 6 \rightarrow a = 2$$

4.- La gráfica siguiente corresponde a la función $y = f(x)$.
Determina:



a) Su dominio y recorrido. *(0'25 p)*

$$D = \Re - \{-2, 1\}$$

$$R = [2, \infty)$$

b) Mira en la gráfica e indica el valor de: *(0'75 p)*

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$	$\lim_{x\to-2^-} f(x) = 2$	$\lim_{x\to-2^+} f(x) = 2$	$f(-2) = \nexists$
$\lim_{x\to1^-} f(x) = +\infty$	$\lim_{x\to1^-} f(x) = \infty$	$f(1) = \nexists$	$\lim_{x\to5} f(x) = 8$
$f(5) = 10$	$\lim_{x\to7^-} f(x) = 10$	$\lim_{x\to7^+} f(x) = 2$	$\lim_{x\to7} f(x) = \nexists$
$f(7) = 2$	$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$		

c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos y absolutos, y acotación. *(0'5 p)*

$Crece = (-2, 1)\cup(2, 5)\cup(5, 7)\cup(7, \infty)$ $\quad$ $Decrece = (-\infty, -2)\cup(1, 2)$

Hay un mínimo relativo en $(2, 5)$.

No hay ni máximo ni mínimos absolutos.

Está acotada inferiormente: $Cota\_Inferior = 2$

e) Puntos de discontinuidad y tipo. *(0'5 p)*

$x = -2 \rightarrow D.Evitable.P.Hueco$

$x = 1 \rightarrow D.Inevitable.S.Infinito$

$x = 5 \rightarrow D.Evitable.P.Desplazado$

$x = 7 \rightarrow D.Inevitable.S.Finito$