I.E.S. TIERRA ESTELLA MATEMÁTICAS I – 1.º Bchto

Análisis Global 3ª Evaluación NOTA:

NOMBRE 24/05/2019

1.- Dada la función: $y = \dfrac{x+2}{2x+1}$, determina su función inverso/recíproca. 0,75p

$$y = \frac{x+2}{2x+1} \xrightarrow{x \leftrightarrow y} x = \frac{y+2}{2y+1} \rightarrow x \cdot (2y+1) = y+2 \rightarrow 2xy + x = y + 2 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2xy - y = 2 - x \rightarrow y \cdot (2x-1) = 2 - x \rightarrow y = \frac{2-x}{2x-1} \rightarrow y^{-1} = \frac{2-x}{2x-1}$$

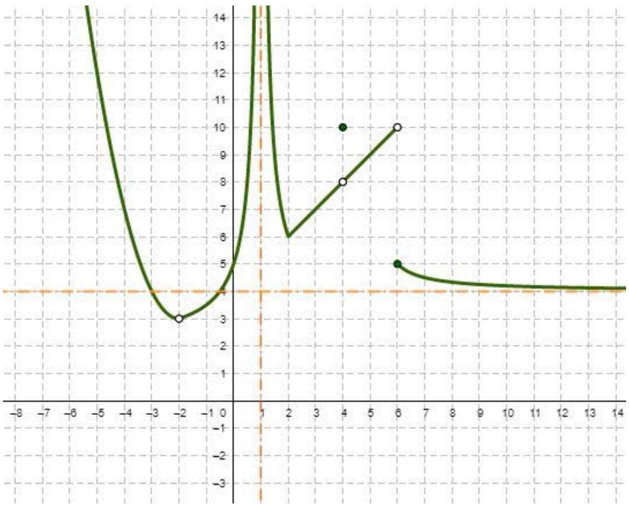
2.- La gráfica propuesta corresponde a una función. Se te pide:

a) Dominio y recorrido 0,25p

$D = R - \{-2, 1\}$ $R = (3, \infty)$

b) Indica el valor de los siguientes límites 0,5p

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$	$\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = 3$
$\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = 3$	$f(-2) = \nexists$
$f(1) = \nexists$	$\lim\limits_{x\to4} f(x) = 8$
$f(4) = 10$	$\lim\limits_{x\to6^-} f(x) = 10$
$\lim\limits_{x\to6^+} f(x) = 5$	$\lim\limits_{x\to6} f(x) = \nexists$
$f(6) = 5$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 4$



c) Puntos de discontinuidad, tipo de las mismas, asíntotas y sus ecuaciones. 0,5p

$x = -2 \rightarrow$ D. Evitable P. Hueco
$x = 1 \rightarrow$ D. Inevitable S. Infinito
$x = 4 \rightarrow$ D. Evitable P. Desplazado
$x = 6 \rightarrow$ D. Inevitable S. Finito

A.Vertical: $x = 1$
A.Horizontal: $y = 4$

3.- Calcula, dos, de los siguientes límites que se te proponen e interpreta gráficamente el resultado:

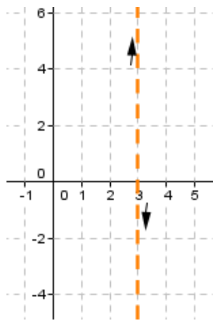
a) 0'75p

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{x^2-9}-\frac{1}{x-3}\right)=\lim_{x\to 3}\frac{-x-2}{(x-3)\cdot(x+3)}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{-x-2}{(x-3)\cdot(x+3)}=\dfrac{-}{-\cdot+}\infty=+\infty\\[2ex] \lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{-x-2}{(x-3)\cdot(x+3)}=\dfrac{-}{+\cdot+}\infty=-\infty\end{cases}$$

$\downarrow RG$ $\xrightarrow{RG}\dfrac{-3-2}{0\cdot(3+3)}=\dfrac{-5}{0}=\pm\infty$

$$\frac{1}{3^2-9}-\frac{1}{3-3}=\frac{1}{0}-\frac{1}{0}=\pm\infty\pm\infty$$

$$\frac{1}{x^2-9}-\frac{1}{x-3}=\frac{1-(x+3)}{(x-3)\cdot(x+3)}=\frac{-x-2}{(x-3)\cdot(x+3)}$$

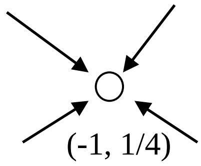


b) 0'75p

$$\lim_{x\to -1}\left(\frac{\sqrt{5+x}-2}{x+1}\right)=\lim_{x\to -1}\frac{1}{\sqrt{5+x}+2}=\frac{3}{4}$$

$\downarrow RG$ $\xrightarrow{RG}\dfrac{1}{\sqrt{5-1}+2}=\dfrac{1}{\sqrt{4}+2}=\dfrac{1}{2+2}=\dfrac{1}{4}$

$$\frac{\sqrt{5-1}-2}{-1+1}=\frac{\sqrt{4}-2}{0}=\frac{2-2}{0}=\frac{0}{0}$$



$$\frac{\sqrt{5+x}-2}{x+1}=\frac{\sqrt{5+x}-2}{x+1}\cdot\frac{\sqrt{5+x}+2}{\sqrt{5+x}+2}=\frac{5+x-4}{(x+1)\cdot\left(\sqrt{5+x}+2\right)}=$$

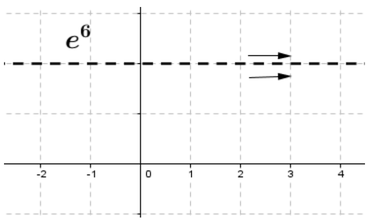
$$=\frac{1+x}{(x+1)\cdot\left(\sqrt{5+x}+2\right)}=\frac{1}{\sqrt{5+x}+2}$$

c) 0'75p

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left[(2x-1)\left(\frac{x+1}{x-2}-1\right)\right]}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left[(2x-1)\left(\frac{x+1-x+2}{x-2}\right)\right]}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left[(2x-1)\frac{3}{x-2}\right]}==e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x-3}{x-2}}=e^6$$

$\downarrow RG$

$\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}=1^{\infty}\to IND\ n^o\ e$ $\xrightarrow{RG}\dfrac{\infty}{\infty}=\dfrac{6x}{x}=6$



3.- Dada la función: $f(x)=\begin{cases} -2x+4m & si \quad x<-2 \\ 4+x^2 & si \quad -2\le x<1 \\ \dfrac{5}{x} & si \quad x>+1 \end{cases}$ se te pide:

a) determina el valor del parámetro "m" para que dicha función se continua en $x=-2$ .0,5p

Se deberá cumplir que: $f(-2)=\lim\limits_{x\to-2} f(x)$

$f(-2)=-2\cdot(-2)+4m$

$$\lim_{x\to-2} f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to-2^-}(-2x+4m)=4+4m \\ \lim\limits_{x\to-2^+}(4+x^2)=4+4=8 \end{cases} \to 4+4m=8 \to 4m=4 \to m=1$$

b) si $m=1$, estudia la continuidad de la función resultante. 0,5p

Como en $x=-2$ para $m=1$ es continua, deberemos estudiarla en $x=-1$ por ser un punto de cambio, en $x=0$ NO por estar fuera del intervalo de definición..

Continuidad en $x=-1$. Se deberá cumplir: $f(-1)=\lim\limits_{x\to-1} f(x)$

$$\left.\begin{array}{l} f(1)\to\nexists \quad falta\ el\ signo\ = \\ \lim\limits_{x\to1} f(x)=\begin{cases} \lim\limits_{x\to1^-}(4+x^2)=4+1=5 \\ \lim\limits_{x\to1^+}\left(\dfrac{5}{x}\right)=\dfrac{5}{1}=5 \end{cases} \to \exists \lim\limits_{x\to-1} f(x)=5 \end{array}\right\} \to D.Evitable\ de\ P.H$$

4.- Dada la función $f(x)=3x^2-5x$, Se te pide:

a)) Obtén, aplicando la definición, su función derivada. 0,5p

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}(6x+3h-5)=6x-5$$

$$f(x+h)=3\cdot(x+h)^2-5\cdot(x+h)=3x^2+6xh+3h^2-5x-5h$$

$$f(x+h)-f(x)=6xh+3h^2-5h=h\cdot(6x+3h-5)$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{h\cdot(6x+3h-5)}{h}=6x+3h-5$$

b) Determina la ecuación de la recta tangente a la función propuesta en el punto de abscisa $x = 2$. 0,5p

Dicha ecuación será de la forma: $y = f(2) + f'(2)\cdot(x-2)$

Como:

$$\begin{cases} f(2) = 3\cdot 2^2 - 5\cdot 2 = 12 - 10 = 2 \\ \\ f'(2) = 6\cdot 2 - 5 = 12 - 5 = 7 \end{cases} \rightarrow y = 2 + 7\cdot(x-2) \rightarrow y = 7x - 12$$

5.- Calcula las funciones derivadas de, dos, de las siguientes funciones propuestas:

a) 0,75p

$$y = \frac{x^2+3}{(3x-5)^2} \rightarrow y' = \frac{2x\cdot(3x-5)^2 - (x^2+3)\cdot 2\cdot(3x-5)\cdot 3}{(3x-5)^4} \rightarrow$$

$$\rightarrow y' = \frac{2x\cdot(3x-5) - (x^2+3)\cdot 2\cdot 3}{(3x-5)^3} \rightarrow y' = \frac{6x^2 - 10x - 6x^2 - 9}{(3x-5)^3} \rightarrow$$

$$\rightarrow y' = \frac{-10x-9}{(3x-5)^3}$$

b) 0,75p

$$y = ArcTan\sqrt{x^2-1} = ArcTan(x^2-1)^{\frac{1}{2}} \rightarrow y' = \frac{\frac{1}{2}(x^2-1)^{\frac{-1}{2}}\cdot 2x}{1+\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow y' = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}\cdot(1+x^2-1)} \rightarrow y' = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}\cdot x^2} \rightarrow y' = \frac{1}{x\cdot\sqrt{x^2-1}}$$

c) 0,75p

$$y = \left(\frac{x^3-5}{e^{2x}}\right)^{Sen^2(4x-2)} \xrightarrow{Ln} Ln\ y = Sen^2(4x-2)\cdot\left[Ln(x^3-5) - 2x\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{y'}{y} = 2Sen(4x-2)\cdot Cos(4x-2)\cdot 4\cdot\left[Ln(x^3-5)-2x\right] + Sen^2(4x-2)\cdot\left(\frac{3x^2}{x^3-5} - 2\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow Y' = \left(\frac{x^3-5}{e^{2x}}\right)^{Sen^2(4x-2)}\cdot\left\{4\cdot Sen[2\cdot(4x-2)]\cdot\left[Ln(x^3-5)-2x\right] + Sen^2(4x-2)\cdot\left(\frac{3x^2}{X^3-5} - 2\right)\right\}$$

7.- Dada la función: $y = \frac{x^3 - 4}{x^2}$, cuya derivada primera es $y' = \frac{x^3 + 8}{x^3}$ y su derivada segunda es $y'' = \frac{-24}{x^4}$. Se te pide:

a) Estudia su dominio, recorrido y cortes con ejes 0'25p

Se trata de una función racional por lo tanto:
$D = \Re - \{x^2 = 0\} \rightarrow D = \Re - \{0\}$

Cortes con ejes:

Abscisas: $y = 0 \rightarrow \frac{x^3 - 4}{x^2} = 0 \rightarrow x^3 - 4 = 0 \rightarrow x^3 = 4 \rightarrow x = \sqrt[3]{4} \rightarrow \left(\sqrt[3]{4}, 0\right)$

Ordenadas: $x = 0 \rightarrow \nexists f(0)$. No corta al eje de ordenadas

b) Sus asíntotas y la posición de las mismas respecto a la gráfica 1

.

A.V.: Si la hay debería haberla en los puntos en los que se anula el denominador siendo en esos puntos el limite $\pm\infty$

En nuestro caso $x = 0$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3 - 4}{x^2} = \frac{-4}{0} = \pm\infty \xrightarrow{Posición} \begin{cases} \lim_{x \to 0^-} \frac{x^3 - 4}{x^2} = \frac{-}{+}\infty = -\infty \\ \lim_{x \to 0^+} \frac{x^3 - 4}{x^2} = \frac{-}{+}\infty = -\infty \end{cases}$$

A.H. no hay porque $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ y debería ser un número finito.

A.O.: La hay porque el $G.N. = G.D. + 1$ y tendrá la forma: $y = mx + n$. Donde:

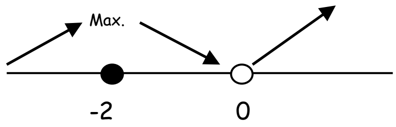
$$\left.\begin{array}{l} m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - 4}{x^3} = 1 \\ n = \lim_{x \to \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{x^3 - 4}{x^2} - 1x\right] = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{x^3 - 4 - x^3}{x^2}\right] = \lim_{x \to \infty} \frac{-4}{x^2} = 0 \end{array}\right\} \rightarrow y = x$$

$$\text{Posición: } \begin{cases} \lim_{x \to -\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to -\infty} \frac{-4}{x^2} = \frac{-}{+}0 = 0^- \rightarrow Por\ debajo \\ \lim_{x \to \infty} [f(x) - x] = \lim_{x \to \infty} \frac{-4}{x^2} = \frac{-}{+}0 = 0^- \rightarrow Por\ debajo \end{cases}$$

c) Monotonía y posibles máximos/mínimos 1p

Se estudian, estudiando el signo de la primera derivada $y' = \dfrac{x^3 + 8}{x^3}$

Puntos críticos: $\begin{cases} x^3 + 8 = 0 \rightarrow x = \sqrt[3]{-8} = -2 \rightarrow Posible : M - m \\ x^3 = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow \nexists f(0) \end{cases}$



$(-\infty, -2) \xrightarrow{y=-10} y' = \dfrac{-}{-} = + > 0 \rightarrow Crece$

$(-2, 0) \xrightarrow{y=-1} y' = \dfrac{+}{-} = - < 0 \rightarrow Decrece$

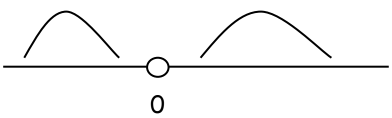
$(0, \infty) \xrightarrow{y=10} y' = \dfrac{+}{+} = + > 0 \rightarrow Crece$

El máximo estará en: $x = -2 \rightarrow y = \dfrac{(-2)^3 - 4}{(-2)^2} = -3 \rightarrow MAX(-2, -3)$

d) Curvatura y posibles puntos de inflexión. 0'5p

Se estudian, estudiando el signo de la segunda derivada $y'' = \dfrac{-24}{x^4}$

Puntos críticos: $x^4 = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow \nexists f(0)$. No se hace 0 nunca por lo que no hay puntos de inflexión



$(-\infty, 0) \xrightarrow{y=-10} y'' = \dfrac{-}{+} = - < 0 \rightarrow \cap\ Convexa$

$(0, \infty) \xrightarrow{y=10} y'' = \dfrac{-}{+} = - < 0 \rightarrow \cap\ Convexa$

d) Un esbozo de su gráfica en el plano adjunto. 0,25p