Normas para la realización de la suficiencia.

Si tienes una única evaluación pendiente:

Deberás realizar ***TODOS*** los ejercicios propuestos para dicha evaluación.

Si tienes 2 evaluaciones pendientes:

1.ª y 2.ª pendientes: 110p

1.1.c, 1.3, 1.4 y 1.6.a
2.1, 2.3, 2.4.a y 2.6

1.ª y 3.ª pendientes: 110p

1.1.c, 1.3, 1.4, 1.6.a y 1.6.b
3.1.b, $3.2.a_1$, 3.2.b y 3.5

2.ª y 3.ª pendientes: 120p

2.1, 2.3, 2.4.a y 2.6
3.1.b, $3.2.a_1$, 3.2.b y 3.5

Si tienes las 3 evaluaciones pendientes o te presentas a subir nota: 130p

1.1.c y 1.4
2.1, 2.3 y 2.6
$3.2.a_1$., 3.2.b y 3.5

1.ª EVALUACIÓN

NOTA: Si tienes únicamente esta evaluación realiza 2 ejercicios de los propuestos en trigonometría, es decir de los ejercicios: 1.4, 1.5 y 1.6 debes hacer únicamente dos de ellos.

1.1.-

a) Racionalizar, operar y simplificar la siguiente expresión: ***6p***

$$\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}+\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}\right)+\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}\right)}{\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}\right)\cdot\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}\right)}=$$

$$=\frac{x-1+x+1+2\sqrt{x^2-1}+x-1+x+1-2\sqrt{x^2-1}}{x-1-x-1}=\frac{4x}{-2}=-2x$$

b) Resuelve la siguiente ecuación: ***6p***

$$5^{x+1}+5^x+5^{x-1}=\frac{31}{5}\rightarrow 5\cdot 5^x+5^x+\frac{5^x}{5}=\frac{31}{5}\rightarrow\frac{25\cdot 5^x+5\cdot 5^x+5^x}{5}=\frac{31}{5}\rightarrow$$

$$\rightarrow 31\cdot 5^x=31\rightarrow 5^x=1\rightarrow 5^x=5^0\rightarrow x=0$$

c) Dada la expresión: $\left(\frac{9}{x}-\frac{x^2}{3}\right)^7$. Se te pide:

c_1) Los dos primeros y los dos últimos términos del desarrollo de Newton. (dejar indicados). ***5p***

$$\left(\frac{9}{x}-\frac{x^2}{3}\right)^7=\binom{7}{0}\cdot\left(\frac{9}{x}\right)^{7-0}\cdot\left(\frac{-x^2}{3}\right)^0+\binom{7}{1}\cdot\left(\frac{9}{x}\right)^{7-1}\cdot\left(\frac{-x^2}{3}\right)^1+\ldots\ldots+$$

$$+\ldots\ldots\ldots+\binom{7}{6}\cdot\left(\frac{9}{x}\right)^{7-6}\cdot\left(\frac{-x^2}{3}\right)^6+\binom{7}{7}\cdot\left(\frac{9}{x}\right)^{7-7}\cdot\left(\frac{-x^2}{3}\right)^7$$

c_2) Obtener, completamente operado el 5.º término de dicho desarrollo: ***3p***

$$5^o\ \text{término}:\binom{7}{4}\cdot\left(\frac{9}{x}\right)^{7-4}\cdot\left(\frac{-x^2}{3}\right)^4=+\frac{7!}{4!\cdot 3!}\cdot\frac{9^3}{x^3}\cdot\frac{x^8}{3^4}=\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 3^6\cdot x^8}{3\cdot 2\cdot 1\cdot x^3\cdot 3^4}=315\cdot x^5$$

1.2.- Un tendero invierte 125€ en la compra de una partida de manzanas. Desecha 20 Kg por defectuosas y vende el resto, aumentando 0'40€ cada kilo sobre el precio de compra, por 147€. ¿Cuántos kilogramos compró?. ***15p***

$$\left.\begin{array}{l} x\rightarrow Kg.\ comprados\xrightarrow{Después}x-20\rightarrow Kg.\ vendidos\\ \frac{125}{x}\rightarrow €/kg\xrightarrow{después}\frac{125}{x}+0'4\rightarrow €/kg\end{array}\right\}\rightarrow(x-20)\cdot\left(\frac{125}{x}+0'4\right)=147\rightarrow$$

$$\rightarrow 125 + 0'4x - \frac{2500}{x} - 8 = 147 \rightarrow 125x + 0'4x^2 - 2500 - 8x = 147x \rightarrow$$

$$\rightarrow 0'4x^2 - 30x - 2500 = 0 \rightarrow x = \frac{30 \pm \sqrt{900 + 4000}}{0'8} = \frac{30 \pm 70}{0'8} = \begin{cases} \dfrac{30+70}{0'8} = 125 \text{ Kg} \\ \dfrac{30-70}{0'8} = \text{Im posible} \end{cases}$$

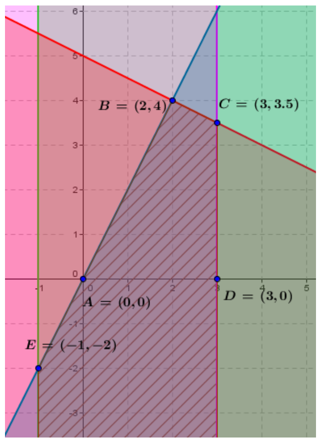
1.3.- Representa los puntos del plano que verifican las condiciones dadas: $\begin{cases} x + 2y \leq 10 \\ 2x - y \geq 0 \\ -1 \leq x \leq 3 \end{cases}$ **15p**

$$x + 2y = 10 \rightarrow \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 10 \\ \hline y & 5 & 0 \end{array}. \xrightarrow{(0,0)} 0 + 2 \cdot 0 = 0 \leq 10 \rightarrow \text{Sí Entra}$$

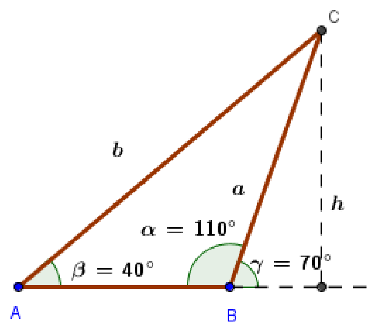
$$2x - y = 0 \rightarrow \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 2 \\ \hline y & 0 & 4 \end{array}. \xrightarrow{(1,0)} 2 \cdot 1 - 0 = 2 \geq 0 \rightarrow \text{Sí Entra}$$

$$x = -1 \rightarrow \begin{array}{c|c|c} x & -1 & -1 \\ \hline y & 0 & 4 \end{array}. \xrightarrow{(0,0)} 0 \geq -1 \rightarrow \text{Sí Entra}$$

$$x = 3 \rightarrow \begin{array}{c|c|c} x & 3 & 3 \\ \hline y & 0 & 4 \end{array}. \xrightarrow{(0,0)} 0 \leq 3 \rightarrow \text{Sí Entra}$$



1.4.- Vamos a comprar una parcela triangular con las medidas de la figura adjunta. Se te pide:



a) Determina los metros de valla necesarios para rodearla en su totalidad. **10p**

Deberemos calcular los lados "a y "b", para ello calcularemos el ángulo C y luego aplicaremos el teorema del Seno:

$$\hat{C} = 180 - (40 + 110) = 30$$

$$T.Seno: \frac{a}{Sen\ 40} = \frac{b}{Sen\ 110} = \frac{150}{Sen\ 30} \rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{150 \cdot Sen\ 40}{Sen\ 30} = 192'84 \cong 193m \\ b = \dfrac{150 \cdot Sen\ 110}{Sen\ 30} = 281'91 \cong 282m \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow p = 150 + 192'84'28 + 281'91 = 624,75 \cong 625m$$

b) ¿Qué superficie tiene la parcela? **5p**

$$Área = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{150 \cdot 181,21}{2} = 13.590,77m^2$$

$$Sen\ 70 = \frac{h}{192'84} \rightarrow h = 192'84 \cdot Sen\ 70 = 181,21m$$

1.5.- Demuestra esta identidad: $\dfrac{cos(a+b)+cos(a-b)}{sen(a+b)+sen(a-b)}=\dfrac{1}{tan\,b}$ **10p**

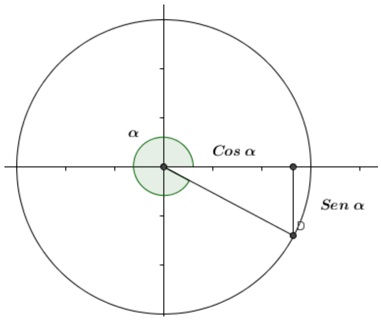
$$\frac{cos(a+b)+cos(a-b)}{sen(a+b)+sen(a-b)}=\frac{1}{tan\,a}\rightarrow\frac{Cos\ a\cdot Cos\ b-Sen\ a\cdot Sen\ b+Cos\ a\cdot Cos\ b+Sen\ a\cdot Sen\ b}{Sen\ a\cdot Cos\ b+Cos\ a\cdot Sen\,b-Sen\ a\cdot Cos\ b+Cos\ a\cdot Sen\,b}=$$

$$=\frac{2\cdot Cos\ a\cdot Cos\ b}{2\cdot Cos\ a\cdot Sen\,b}=\frac{1}{Tan\ b}$$

1.6.- Sabiendo que $cos\ \alpha=\dfrac{1}{3}$ y $sen\alpha<0$. Se te pide:

a) Determinar, sin usar la calculadora ni el valor de α, el resto de las razones trigonométricas de dicho ángulo razonando la localización del ángulo (cuadrante al que pertenece). 7p

$$\left.\begin{array}{l} cos\ \alpha=\dfrac{1}{3}>0\rightarrow\alpha\in 1^o\ o\ 4^o \\ \\ Sen\ \alpha<0\rightarrow\alpha\in 3^o\ O\ 4^o \end{array}\right\}\rightarrow\alpha\in 4^o\rightarrow Tan\ \alpha<0$$



$$Sen^2\alpha+Cos^2\alpha=1\rightarrow Sen^2\alpha+\left(\frac{1}{3}\right)^2=1\rightarrow Sen^2\alpha+\frac{1}{9}=1\rightarrow Sen^2\alpha=1-\frac{1}{9}\rightarrow$$

$$\rightarrow Sen^2\alpha=\frac{8}{9}\rightarrow Sen\,\alpha=\pm\sqrt{\frac{8}{9}}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}\rightarrow Tan\ \alpha=\frac{-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}{\dfrac{1}{3}}=-2\sqrt{2}$$

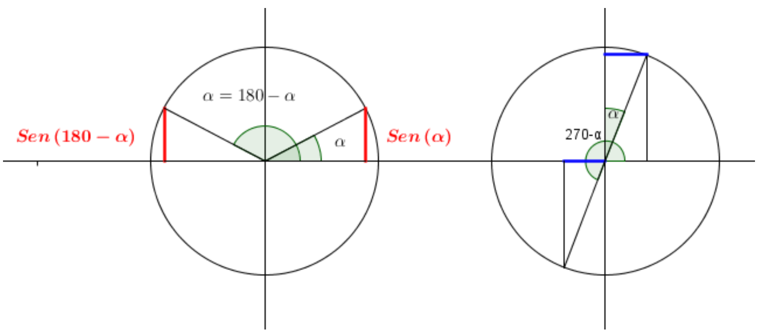
b) Posteriormente, usando la calculadora, calcula el ángulo α y exprésalo en radianes. 3p

$$cos\ \alpha=\frac{1}{3}\rightarrow\alpha=23'51^o\xrightarrow{\notin 4^o}\alpha=-23'51^o=336'49^o=\frac{336'49}{180}\pi=1'87\pi\ rad$$

c) Resuelve la siguiente ecuación trigonométrica: $sen(180^o-x)=cos(270^o-x)+cos\ 180^o$ **15p**

$$sen(180^o-x)=cos(270^o-x)+cos\ 180^o\rightarrow Sen\ x=-Sen\ x-1\rightarrow 2\cdot Sen\ x=-1\rightarrow$$

$$\rightarrow Sen\ x=\frac{-1}{2}\rightarrow x=\begin{cases}-30^o+360^o\ k=330^o+360^o\ k\\ \\ 210^o+360k\end{cases}$$



2.ª EVALUACIÓN

2.1.- Calcula el valor que debe tener "a" para que el módulo del cociente $\frac{a+2i}{1-i}$ sea $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **15p**

$$\frac{a+2i}{1-i}=\frac{a+2i}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i}=\frac{a+ai+2i+2i^2}{1-i^2}=\frac{a-2}{2}+\frac{a+2}{2}i$$

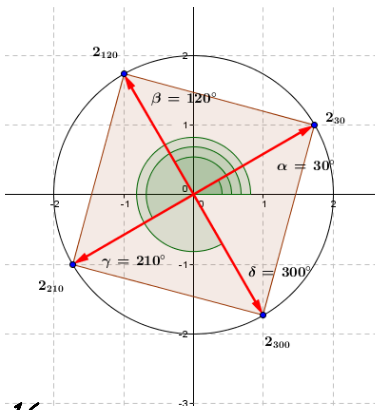
$$\left|\frac{a+2i}{1-i}\right|=\sqrt{\left(\frac{a-2}{2}\right)^2+\left(\frac{a+2}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{a^2+4-4a+a^2+4+4a}{4}}=\frac{\sqrt{2a^2+8}}{2}\rightarrow$$

$$\rightarrow\frac{\sqrt{2a^2+8}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}\rightarrow\sqrt{2a^2+8}=3\sqrt{2}\rightarrow 2a^2+8=18\rightarrow 2a^2=10\rightarrow a^2=5\rightarrow$$

$$\rightarrow a=\pm\sqrt{5}$$

2.2.- Halla $\sqrt[4]{-8+8\sqrt{3}i}$ y representa gráficamente sus soluciones. **15p**

$$\sqrt[4]{-8+8\sqrt{3}i}\rightarrow\sqrt[4]{16_{120}}=\sqrt[4]{16}_{\frac{120+360k}{4}}\rightarrow\begin{cases}k=0\rightarrow z_1=2_{30}\\ k=1\rightarrow z_2=2_{120}\\ k=2\rightarrow z_3=2_{210}\\ k=3\rightarrow z_4=2_{300}\end{cases}$$



$$z=-8+8\sqrt{3}i\rightarrow\begin{cases}|z|=\sqrt{(-8)^2+\left(8\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{64+64\cdot 3}=2\cdot 8=16\\ Tan\ \alpha=\frac{8\sqrt{3}}{-8}=-\sqrt{3}\rightarrow\alpha=-60\xrightarrow{\notin 2^{o}}\alpha=120\end{cases}\rightarrow z=16_{120}$$

2.3.- Dados los vectores: $\vec{u}(-3,-2)$ y el vector $\vec{v}(1,4)$, referidos a una base ortonormal, se te pide:

a) Calcular el ángulo que forman dichos vectores. **10p**

$$Cos\ \alpha=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{(-3)\cdot 1+(-2)\cdot 4}{\sqrt{(-3)^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{1^2+4^2}}=\frac{-11}{\sqrt{13}\sqrt{17}}\rightarrow\alpha=137'73°$$

b) Expresar el vector $\vec{w}(4,-4)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. ¿Qué representan los valores hallados? **10p**

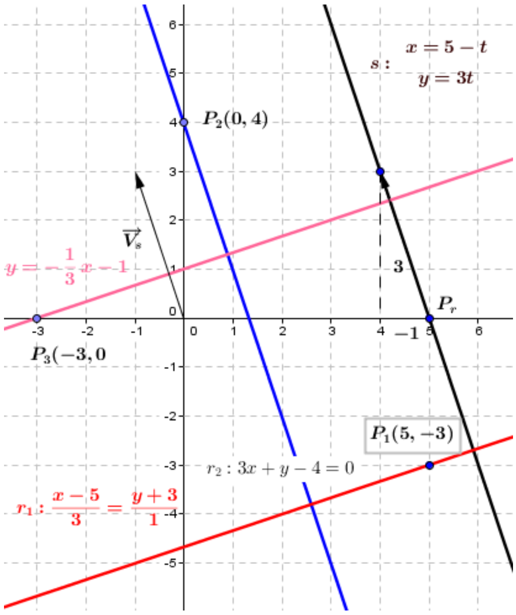
$$\vec{w}(4,-4)=a\cdot(-3,-2)+b\cdot(1,4)\rightarrow\begin{cases}4=-3a+b\rightarrow b=4+3a=4+3\cdot(-2)=-2\\ -4=-2a+4b\rightarrow -4=-2a+4\cdot(4+3a)\rightarrow\end{cases}$$

$$\rightarrow -4=-2a+16+12a\rightarrow -20=10a\rightarrow a=-2$$

$$\vec{w}(4,-4)=-2\cdot(-3,-2)-2\cdot(1,4)$$

Dichos valores, Resultan ser las componentes del vector $\vec{w}$ en la base formada por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, es decir: $\vec{w}(-2,-2)$, en la base $B(\vec{u},\vec{v})$

2.4.- Dada la rectas $s : \begin{cases} x = 5 - t \\ y = 3t \end{cases}$ con $t \in \Re$, halla: **15p**



$$s : \begin{cases} x = 5 - t \\ y = 3t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P_r(5, 0) \\ \vec{V}_r(-1, 3) \rightarrow m_r = \frac{3}{-1} = -3 \end{cases}$$

a) La ecuación continua de una recta r_1 perpendicular a s que pase por $P_1(5, -3)$.

$$r_1 \perp s \begin{cases} P_1 = (5, -3) \\ \vec{V}_{r_1}(3, 1) \end{cases} \xrightarrow{E.Continua} \frac{x-5}{3} = \frac{y+3}{1}$$

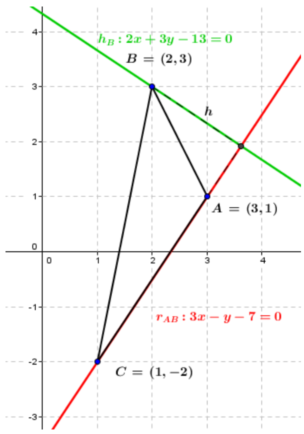
b) La ecuación implícita de r_2 paralela a s que pase por $P_2(0, 4)$.

$$r_2 \,//\, s \begin{cases} P_2 = (0, 4) \\ m_{r_1} = m_s = -3 \end{cases} \xrightarrow{E.P.P.} y = 4 - 3 \cdot (x - 0) \rightarrow y = -3x + 4 \rightarrow 3x + y - 4 = 0$$

c) La ecuación explícita de r_3 perpendicular a s que pase por $P_3(-3, 0)$.

$$r_3 \perp s \begin{cases} P_3 = (-3, 0) \\ m_{r_3} = \frac{1}{3} \end{cases} \xrightarrow{E.P.P.} y = 0 + \frac{1}{3} \cdot (x + 3) \rightarrow y = \frac{1}{3}x + 1$$

2.5.- Dado el triángulo de vértices los puntos $A(3, 1)$, $B(2, 3)$ y $C(1, -2)$, calcula: **15p**



a) El área del triángulo.

$$A = \frac{\left|\vec{AC}\right| \cdot d(B, r_{AC})}{2} = \frac{\sqrt{13} \cdot \frac{7}{\sqrt{13}}}{2} = \frac{7}{2} u^2$$

$$\vec{AC} = (-2, -3) \rightarrow \left|\vec{AC}\right| = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{13} u$$

$$r_{AC} : \begin{cases} A(3, 1) \\ \vec{V}_{r_{AB}} = (-2, -3) \rightarrow m_{r_{AB}} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2} \end{cases} \xrightarrow{E.P.P.} y = 1 + \frac{3}{2}(x - 3) \rightarrow 3x - 2y - 7 = 0$$

$$d(B, r_{AC}) \rightarrow \begin{cases} B(2, 3) \\ r_{AC} : 3x - 2y - 7 = 0 \end{cases} \rightarrow d(B, r_{AC}) = \left|\frac{3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 - 7}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}}\right| = \frac{7}{\sqrt{13}}$$

b) La ecuación general de la altura trazada desde el vértice B.

$$h_B : \begin{cases} B(2,\ 3) \\ \vec{V}_{h_B} \perp \vec{V}_{r_{AB}} \rightarrow \vec{V}_{h_B} = (3,\ -2) \rightarrow m_{h_B} = \dfrac{-2}{3} \end{cases} \xrightarrow{E.P.P.} y = 3 - \frac{2}{3}(x-2) \rightarrow 2x + 3y - 13 = 0$$

2.6.- La ecuación general de una circunferencia viene dada por la expresión: $x^2 + y^2 + 8x - 8y + c = 0$. Se te pide:

a) Determinar el valor de C sabiendo que pasa por el punto $P(-2,\ 2)$. **5p**

$$Si\ P(-2,\ 2) \in Circunf. \rightarrow (-2)^2 + (2)^2 + 8\cdot(-2) - 8\cdot(2) + c = 0 \rightarrow c = 24$$

b) Obtener su ecuación reducida y determinar su centro y el valor del radio y realizar un esbozo de la misma. **10p**

$$x^2 + y^2 + 8x - 8y + 24 = 0 \rightarrow (x + 8x + \ldots.) + (y - 8y + \ldots.) = -24 \rightarrow$$

$$\rightarrow (x + 8x + 4^2) + (y - 8y + 4^2) = -24 + 4^2 + 4^2 \rightarrow (x+4)^2 + (y-4)^2 = 8 \rightarrow$$

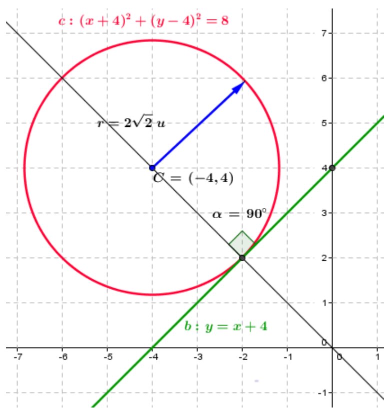
$$\rightarrow Circunfrencia : \begin{cases} C = (-4,4) \\ r = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

c) Determinar la posición de la recta $r \equiv y = x + 4$ respecto a la circunferencia. **5p**

Habrá que calcular la distancia del centro a la recta y compararla con el radio.

$$d(C,r) \rightarrow \begin{cases} C(-4,4) \\ r : x - y + 4 = 0 \end{cases} \rightarrow d(C,r) = \left| \frac{-4-4+4}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} \right| = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} = r \rightarrow$$

La circunferencia y la recta son tangentes.



3.ª EVALUACIÓN. ANÁLISIS

3.1.-

a) Calcula el dominio de la función $f(x) = Ln\left(\frac{x-3}{6-x}\right)$. **10p**

Se trata de una función logarítmica, se deberá cumplir:

$$\frac{x-3}{6-x} > 0 \xrightarrow{P.C.} \begin{cases} x-3=0 \rightarrow x=3 \\ \\ 6-x=0 \rightarrow x=6 \end{cases} \rightarrow Ambos\ hue\ cos$$

$$(-\infty,3) \xrightarrow{x=-10} \frac{-10-3}{6-(-10)} = \frac{-}{+} = - < 0 \rightarrow NO$$

$$(3,6) \xrightarrow{x=5} \frac{5-3}{6-5} = \frac{+}{+} = + > 0 \rightarrow SÍ$$

$$(6,\infty) \xrightarrow{x=10} \frac{10-3}{6-10} = \frac{+}{-} = - < 0 \rightarrow NO$$

$$Do\ min\ io = (3,6)$$

b) Dada la función $y = \sqrt[3]{x+2}$, determina su función inversa/recíproca y comprueba que la función obtenida es efectivamente la inversa/recíproca de la propuesta para $x = 2$. **10P**

$$y = \sqrt[3]{x+2} \xrightarrow{x \leftrightarrow y} x = \sqrt[3]{y+2} \rightarrow x^3 = y+2 \rightarrow y = x^3 - 2 \rightarrow y^{-1} = x^3 - 2$$

$$y \circ y^{-1}(2) = y^{-1} \circ y(2) = 2 \rightarrow \begin{cases} y \circ y^{-1}(2) = y(6) = \sqrt[3]{8} = 2 \\ \\ y^{-1} \circ y(2) = y^{-1}\left(\sqrt[3]{2+2}\right) = y^{-1}\left(\sqrt[3]{4}\right) = \left(\sqrt[3]{4}\right)^3 - 2 = 4 - 2 = 2 \end{cases}$$

3.2.- Calcula:

a) Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a_1) **10p**

$$y = (2x)^{1+senx} \xrightarrow{Ln} Ln\ y = (1 + Sen\ x)\cdot(Ln\ 2 + Ln\ x) \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{y'}{y} = Cos\ x \cdot 1 \cdot Ln(2x) + (1 + Sen\ x)\cdot\frac{1}{x} \rightarrow y' = (2x)^{1+senx}\cdot\left[Cos\ x \cdot Ln(2x) + \frac{(1+Sen\ x)}{x}\right]$$

a_2) **10p**

$$g(x) = Ln^2(1+e^x) \rightarrow g'(x) = \frac{2\cdot Ln(1+e^x)\cdot e^x}{1+e^x} \rightarrow y' = \frac{e^x \cdot Ln(1+e^x)^2}{1+e^x}$$

b) El siguiente límite: **10p**

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{x^2-5x+6}{x^3-3x^2}\right)=\lim_{x\to 3}\frac{x-2}{x^2}=\frac{1}{9}$$

$$\downarrow RG \qquad \xrightarrow{RG}\frac{3-2}{3^2}=\frac{1}{9}$$

$$\frac{3^2-5\cdot 3+6}{3^3-3\cdot 3^2}=\frac{0}{0}\rightarrow\frac{x^2-5x+6}{x^3-3x^2}=\frac{(x-2)\cdot(x-3)}{x^2\cdot(x-3)}=\frac{x-2}{x^2}$$

3.3.- Estudia la continuidad de la función $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x-1} & si\quad x<3\\ \sqrt{x+1} & si\quad x\geq 3\end{cases}$. 10*p*

Estudiaremos en primer lugar el dominio:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x-1} & si\quad x<3\xrightarrow{F.R}x-1\neq 0\rightarrow x\neq 1\rightarrow D=(-\infty,1)\cup(1,3)\\ \sqrt{x+1} & si\quad x\geq 3\xrightarrow{F.I.I.P}x+1\geq 0\rightarrow x\geq -1\rightarrow D=[3,\infty)\end{cases}$$

La continuidad habrá que estudiarla en: x=1 (Dominio) y x=3 (Cambio)

Continuidad en $x=1\rightarrow f(1)=\lim_{x\to 1}f(x)$

$$\left.\begin{array}{l}f(1)=\frac{1}{1-1}=\frac{1}{0}\rightarrow\nexists f(1)\\ \lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}=\pm\infty\end{array}\right\}\rightarrow D.Inevitable\_Salto\_Infinito$$

Continuidad en $x=3\rightarrow f(1)=\lim_{x\to 1}f(x)$

$$\left.\begin{array}{l}f(3)=\sqrt{3+1}=2\\ \lim_{x\to 3}f(x)=\xrightarrow{Cambio}\begin{cases}\lim_{x\to 3^-}f(x)=\lim_{x\to 3^-}\frac{1}{3-1}=\frac{1}{2}\\ \lim_{x\to 3}f(x)=2\end{cases}\end{array}\right\}\rightarrow D.Inevitable\_Salto\_Finito$$

3.4.- Dada la función $f(x) = x^2 - 3x$, prueba que $f'(-2) = -7$ aplicando la definición de derivada. Explica cuál es el significado geométrico de la derivada de una función en un punto. ***10p***

$$f'(-2) = \lim_{h\to 0}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h\cdot(h-7)}{h} = \lim_{h\to 0}(h-7) = -7$$

$$f(-2+h) = (-2+h)^2 - 3(-2+h) = 4 + h^2 - 4h + 6 - 3h = h^2 - 7h + 10$$

$$f(-2) = (-2)^2 - 3\cdot(-2) = 4 + 6 = 10$$

$$f(-2+h) - f(-2) = h^2 - 7h = h\cdot(h-7)$$

La derivada de una función en un punto resulta ser la pendiente de la recta tangente a la gráfica en $x = 2$, además como en este caso la derivada es negativa la función es decreciente en $x = 2$

3.5.- Dada la función $y = \dfrac{x}{x^2-1}$, cuya primera derivada es: $y' = -\dfrac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$, y su segunda derivada es: $y'' = \dfrac{2x\cdot(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$. Se te pide:

a) Dominio y cortes con los ejes. (*3p*)

$$y = \frac{x}{x^2-1} \rightarrow F.Racional \rightarrow D = \Re - \{x^2 - 1 = 0\} \rightarrow D = \Re - \{-1, +1\}$$

Cortes con ejes:

Abscisas: $y = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0,0)$

Ordenadas: $x = 0 \rightarrow \dfrac{0}{0-1} = 0 \rightarrow (0,0)$

b) Sus asíntotas (y posición de la función respecto a ellas). (*8p*)

A.Verticales: si las hay las habrá en los valores que anulan el denominador es decir en $x = \pm 1$, además los límites en esos puntos deben valer $\pm\infty$. Comprobamos:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x}{x^2-1} = \pm\infty \rightarrow x = -1 \; A.V. \xrightarrow{Posición} \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to -1^-}\frac{x}{x^2-1} = \frac{-}{+}\infty = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to -1^+}\frac{x}{x^2-1} = \frac{-}{-}\infty = +\infty \end{cases}$$

$\downarrow$ ***RG***

$$\frac{-1}{(-1)^2-1} = \frac{-1}{0} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x}{x^2-1}=\pm\infty \to x=1\ A.V. \xrightarrow{Posixión} \begin{cases} \lim_{x\to 1^-}\frac{x}{x^2-1}=\frac{+}{-}\infty=-\infty \\ \lim_{x\to 1^+}\frac{x}{x^2-1}=\frac{+}{+}\infty=+\infty \end{cases}$$

$\downarrow$ *RG*

$$\frac{1}{(1)^2-1}=\frac{1}{0}=\pm\infty$$

A.Horizontal: Para que la haya el límite en $\pm\infty$ debe ser un número finito.

$$\lim_{x\to\mp\infty}\frac{x}{x^2-1}=\lim_{x\to\mp\infty}\frac{1}{x}=0\to y=0=1\ A.H. \xrightarrow{Posixión} \begin{cases} \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x^2-1}-0\right)=\frac{-}{+}0=0^-\to Por\_debajo \\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x^2-1}-0\right)=\frac{+}{+}0=0^+\to Por\_Encima \end{cases}$$

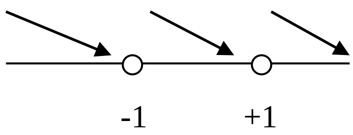
$\downarrow$ *RG*

$$\frac{\infty}{\infty}=\frac{x}{x^2}=\frac{1}{x}=\pm\infty$$

c) Monotonía, crecimientos-extremos (*8p*)

Habrá que estudiar el signo de la 1ª Derivada: $y'=-\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$

$$\xrightarrow{P.Críti\ cos}\begin{cases} x^2+1=0\to x=\pm\sqrt{-1}\to\nexists\to No\ hay\ M-m \\ (x^2-1)^2=0\to x=\pm1\to\nexists\ Función \end{cases}$$



$$(-\infty,-1)\xrightarrow{-10}y'=-\frac{+}{+}=-\to Decrece$$

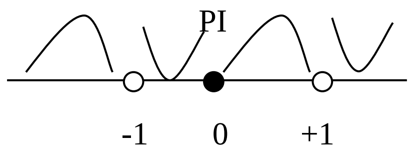
$$(-1,1)\xrightarrow{0}y'=-\frac{+}{+}=-\to Decrece$$

$$(1,\infty)\xrightarrow{10}y'=-\frac{+}{+}=-\to Decrece$$

d) Curvatura-puntos de inflexión (*8p*).

Habrá que estudiar el signo de la 2ª Derivada: $y''=\frac{2x\cdot(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$

$$\xrightarrow{P.Críti\ cos}\begin{cases} 2x\cdot(x^2+3)=0\to\begin{cases} x=0\to P.P.Inflexión \\ x^2+3=0\to Im\ posible \end{cases} \\ (x^2-1)^3=0\to x=\pm1 \end{cases}$$



$$(-\infty,-1)\xrightarrow{-10}y''=\frac{-\cdot+}{+}=-\to\cap\ Convexa$$

$$(-1,0)\xrightarrow{-0'5}y'=\frac{-\cdot+}{-}=+\to\cup\ Cóncava$$

$$(0,1)\xrightarrow{0'5}y''=\frac{+\cdot+}{-}=-\to\cap\ Convexa$$

$$(1,\infty)\xrightarrow{10}y'=\frac{+\cdot+}{+}=+\to\cup\ Cóncava$$

El PI en: $x=0\to y=\frac{0}{0-1}=0\to PI(0,0)$

e) Realiza un esbozo de la gráfica (*3p*).