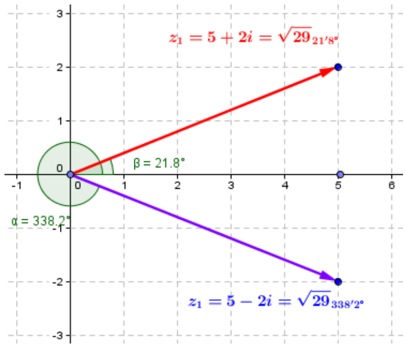
Nombre:

1.- Resuelve la ecuación $z^2 - 10z + 29 = 0$ en el conjunto de los números complejos. Escribe sus soluciones de forma polar y binómica y represéntalas gráficamente. **10p**

$$z^2 - 10y^2 + 29 = 0 \rightarrow z = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 116}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{-16}}{2} =$$

$$= \frac{10 \pm \sqrt{16} \cdot \sqrt{-1}}{2} = \frac{10 \pm 4i}{2} = \begin{cases} z_1 = \dfrac{10 + 4i}{2} = 5 + 2i \xrightarrow{\;*\;} \\ z_1 = \dfrac{10 - 4i}{2} = 5 - 2i \xrightarrow{\;**\;} \end{cases}$$



$$\xrightarrow{\;*\;} z_1 = 5 + 2i \rightarrow \begin{cases} |z_1| = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29} \\ \operatorname{Tan} \alpha = \dfrac{2}{5} \rightarrow \alpha = 21'8^\circ \end{cases} \quad z_1 = \sqrt{29}_{21'8^\circ}$$

$$\xrightarrow{Conugado} z_2 = 5 - 2i \rightarrow z_2 = \sqrt{29}_{-21,8} = \sqrt{29}_{338'2^\circ}$$

2.- Aplicando el método de Gauss resuelve el siguiente sistema de ecuaciones, una vez resuelto y a la vista de la solución obtenida clasifícalo: 10p

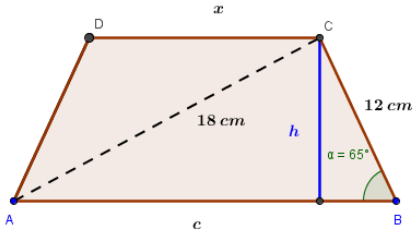
$$\begin{cases} -x + 2y + 5z = -5 \\ 3x + y - 2z = 9 \\ 2x - y + z = 2 \end{cases} \xrightarrow{Ordenamos} \begin{cases} -x + 2y + 5z = -5 \xrightarrow{\cdot 1} -x + 2y + 5z = -5 \\ 3x + y - 2z = 9 \xrightarrow{2^a + 1^a \cdot 3} /+ 7y + 13z = -6 \rightarrow \\ 2x - y + z = 2 \xrightarrow{3^a + 1^a \cdot 2} = /+ 3y + 11z = -8 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\xrightarrow{\cdot 1} -x + 2y + 5z = -5 \xrightarrow{z=-1,\ y=1} -x + 2 \cdot (1) + 5(-1) = -5 \rightarrow x = 2 \\ &\xrightarrow{\cdot 3} \quad + 21y + 39z = -18 \xrightarrow{z=-1} 21y + 39 \cdot (-1) = -18 \rightarrow 21y = 21 \rightarrow y = 1 \\ &\xrightarrow{\cdot(-7)} -21y - 77z = 56 \xrightarrow{3^a + 2^a} -38z = 38 \rightarrow z = -1 \end{aligned}$$

El sistema tiene solución única: Sistema Compatible Determinado.

3.-Calcular el perímetro y el área del trapecio isósceles de la figura. 15p

Aplicamos T.Seno en triángulo ABC:



$$\frac{18}{Sen\ 65^\circ} = \frac{12}{Sen\ \hat{A}} = \frac{c}{Sen\ \hat{C}} \rightarrow \begin{cases} Sen\ \hat{A} = \dfrac{12 \cdot Sen\ 65^\circ}{18} = 37'17^\circ \\ \hat{C} = 180^\circ - (65^\circ + 37'17^\circ) = 77'83^\circ \\ c = \dfrac{18 \cdot Sen\ 77'83}{Sen\ 65^\circ} = 19'41cm \end{cases}$$

En el Triángulo rectángulo:

$$\begin{vmatrix} Sen\ 65^\circ = \dfrac{h}{12} \rightarrow h = 12 \cdot Sen\ 65^\circ = 10,86cm \\ Cos\ 65^\circ = \dfrac{\overline{BE}}{12} \rightarrow BE = 12 \cdot Cos\ 65^\circ = 5'09cm \end{vmatrix}$$

Cáculo de "x": $x = c - 2 \cdot BE = 19'41 - 2 \cdot 5'09 = 9'27cm$

$$P = 2 \cdot 12 + 9'27 + 19'41 = 52'68cm$$

$$Área = \frac{B+b}{2} \cdot h = \frac{19'41 + 9'27}{2} \cdot 10'86 = 155'73cm^2$$

4.- Dada la recta $s \equiv \begin{cases} x = 5 - t \\ y = 3t \end{cases} \rightarrow t \in \Re$, halla:

$$s \equiv \begin{cases} x = 5 - t \\ y = 3t \end{cases} \xrightarrow{Información} \begin{matrix} A_s(5,0) \\ \vec{V_s}(-1,3) \rightarrow m_s = \dfrac{3}{-1} = -3 \end{matrix}$$

a) La ecuación continua de una recta **r₁** perpendicular a **s** que pase por $P_{r_1} = (5,-3)$. 10**p**

$$r_1 \rightarrow \begin{cases} P_{r_1} = (5,-3) \\ \perp s \rightarrow \vec{V}_{r_1} = (3,1) \end{cases} \xrightarrow{Continua} \frac{x-5}{3} = \frac{y+3}{1}$$

b) La ecuación implícita o general de **r₂** paralela a **s** que pase por $P_{r_2} = (0,4)$. 10**p**

$$r_2 \rightarrow \begin{cases} P_{r_2} = (0,4) \\ // s \rightarrow \vec{V}_{r2} = (-1,3) \rightarrow m_{r_2} = \dfrac{3}{-1} = -3 \end{cases} \xrightarrow{Ep.p.} y = 4 - 3(x - 0) \xrightarrow{E.General} 3x + y - 4 = 0$$

5.- Calcular:

a) Uno de los siguientes límites 10p

a_1)

$$\lim_{x\to 2}(3-x)^{\frac{1}{x-2}} = e^{\lim_{x\to 2}\left[(3-x-1)\cdot\frac{1}{x-2}\right]} = e^{\lim_{x\to 2}\left[(2-x)\cdot\frac{1}{x-2}\right]} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$\downarrow RG$ $\xrightarrow{RG} \dfrac{2-2}{2-2} = \dfrac{-0}{0} \to \dfrac{2-x}{x-2} = -1$

$$(3-2)^{\frac{1}{2-2}} = 1^{\infty} \to IND\ n^o\ e$$

a_2)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \frac{1}{2}$$

$\downarrow RG$ $\xrightarrow{RG} \dfrac{\infty}{\infty} \xrightarrow{mismo\ Grado} \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \dfrac{x}{x+x} = \dfrac{x}{2x} = \dfrac{1}{2}$

$$\infty-\infty \to \sqrt{x^2+x+1}-x = \left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2+x+1}+x}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \frac{x^2+x+1-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x} =$$

$$= \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}$$

b) Una de las siguientes derivadas: 10p

b_1)

$$y = \frac{e^x\cdot\cos x}{2^{x+4}} \to y' = \frac{\left[e^x\cdot 1\cdot Cos\ x + e^x\cdot(-Sen\ x)\cdot 1\right]\cdot 2^{x+4} - e^x\cdot\cos x\cdot 2^{x+4}\cdot Ln\ 2\cdot 1}{\left(2^{x+4}\right)^2} =$$

$$= \frac{e^x\cdot 2^{x+4}\cdot\left(Cos\ x - Sen\ x + Ln\ 2\cdot Cos\ x\right)}{2^{2x+8}}$$

b_2)

$$y = (5x)^{Ln\ x^2} = \xrightarrow{Ln} Ln\ y = 2\cdot Ln\ x\cdot Ln(5x) \xrightarrow{Derivando} \frac{y'}{y} = 2\cdot\left(\frac{1}{x}\cdot \ln 5x + Ln\ x\cdot\frac{5}{5x}\right) \to$$

$$\to y' = \frac{(5x)^{Ln\ x^2}\cdot 2}{x}\cdot\left(\ln 5x + Ln\ x\right) = \frac{(5x)^{Ln\ x^2}\cdot 2}{x}\cdot Ln\left(5x^2\right)$$

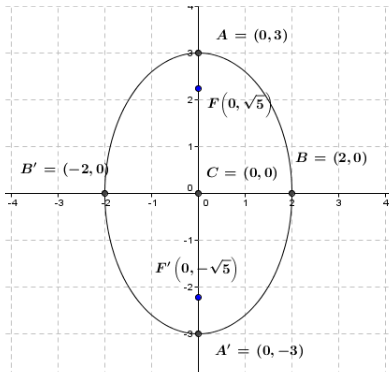
6.- Clasificar la siguiente cónica, indicando focos, vértices, ejes y excentricidad y haciendo un esbozo de la misma: $9x^2 + 4y^2 - 36 = 0$

10p

$$9x^2 + 4y^2 - 36 = 0 \rightarrow 9x^2 + 4y^2 = 36 \rightarrow \frac{9x^2}{36} + \frac{4y^2}{36} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Se trata de una elipse de eje vertical.

$$\text{Elementos:} \rightarrow \begin{cases} \left\{\begin{array}{l} a = \sqrt{9} = 3 \\ \\ b = \sqrt{4} = 2 \end{array}\right. \rightarrow c = \sqrt{9-4} = \sqrt{5} \rightarrow e = \dfrac{3}{\sqrt{5}} = \dfrac{3\sqrt{5}}{5} \\ \\ C(0,0) \\ \\ A = (0,3) \text{ y } A'(0,-3) \\ \\ B = (2,0) \text{ y } B'(-2,0) \\ \\ F = \left(0, \sqrt{5}\right) F'\left(0, -\sqrt{5}\right) \end{cases}$$



7.-Indica el dominio y estudia la continuidad de la siguiente función: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 - 1}{3} & si\ x < -1 \\ e^{x^2-1} & si\ -1 \le x < 1 \\ \dfrac{-4}{x-5} & si\ x > 1 \end{cases}$ **15p**

Calculemos el dominio de la función propuesta:

$$\left.\begin{array}{l} \textit{La 1ª es polinómica : Ningún problema.} \\ \textit{La 2ª exponencial con exponente polinomio, ningún problema.} \\ \textit{La 3ª Racional : no existirá en : } x - 5 = 0 \rightarrow x = 5 > 1 \rightarrow \textit{Eliminar} \end{array}\right\} \rightarrow D = \Re - \{5\}$$

Habrá que estudiar la continuidad en: $x = -1,\ x = 1 \text{ y } x = 5$

Continuidad en $x = -1 \xrightarrow{\text{Se deberá cumplir}} f(-1) = \lim_{x \to -1} f(x)$

$$f(-1) = \frac{2 \cdot (-1)^2 - 1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to -1} f(x) \begin{cases} \lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \dfrac{2x^2 - 1}{3} = \dfrac{1}{3} \\ \\ \lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \left(e^{x^2-1}\right) = 1 \end{cases} \rightarrow \textit{Disc.Inev.Salto.Finito}$$

Continuidad en $x = 1 \xrightarrow{\text{Se deberá cumplir}} f(1) = \lim_{x \to 1} f(x)$

$$f(1) = e^{1^2-1} = 1$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) \begin{cases} \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \left(e^{x^2-1}\right) = 1 \\ \\ \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \dfrac{-4}{x-5} = 1 \end{cases} \rightarrow \textit{Continua}$$

Continuidad en $x = 5 \xrightarrow{\text{Se deberá cumplir}} f(5) = \lim\limits_{x \to 5} f(x)$

$$\left.\begin{array}{l} f(5) = \dfrac{-4}{5-5} = \dfrac{-4}{0} \nexists f(5) \\ \lim\limits_{x \to 5} f(x) = \lim\limits_{x \to 5} \dfrac{-4}{x-5} = \pm\infty \end{array}\right\} Disc. Inevitable. Salto\_Infinito$$

8.- Dada la función $f(x) = \dfrac{3x^2}{(x-4)^2}$ siendo su primera derivada : $f'(x) = \dfrac{-24x}{(x-4)^3}$. Se te pide:

a) Determina las ecuaciones de sus asíntotas y su posición respecto a la gráfica. 15p

- Asíntota vertical: Si la hay estará en los valores de "x" que anulen su denominador, en nuestro caso $(x-4)^2 = 0 \to x - 4 = 0 \to x = 4$, además el límite debe ser infinito.

$$\lim_{x \to 4} \frac{3x^2}{(x-4)^2} = \pm\infty \to x = 4 \ A.V. \xrightarrow{\text{Posición}} \begin{cases} \lim\limits_{x \to 4^-} \dfrac{3x^2}{(x-4)^2} = \dfrac{+}{+}\infty = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 4^+} \dfrac{3x^2}{(x-4)^2} = \dfrac{+}{+}\infty = +\infty \end{cases}$$

$\downarrow RG$

$$\frac{3 \cdot 4^2}{(4-4)^2} = \frac{48}{0} = \pm\infty$$

- Asíntota Horizontal: el límite en el infinito debe ser un número finito.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x^2}{(x-4)^2} = 3 \to Y = 3 \ A.h. \xrightarrow{\text{Posición}} \begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{3x^2}{(x-4)^2} - 3 \right) = * \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x^2}{(x-4)^2} - 3 \right) = ** \end{cases}$$

$\downarrow RG$

$$\frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{Grados\_Iguales}} \frac{3x^2}{x^2 \ldots} = 3$$

$$\frac{3x^2}{(x-4)^2} - 3 = \frac{3x^2 - 3x^2 + 28x - 48}{x^2 - 8x + 16} = \frac{28x - 48}{(x-4)^2}$$

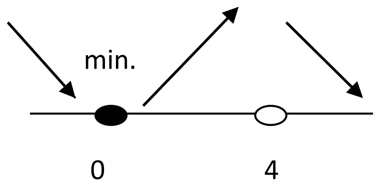
$$* = \lim_{x \to -\infty} \frac{28x - 48}{(x-4)^2} = \frac{-}{+} 0 = 0^- \ Por\_debajo$$

$$** = \lim_{x \to +\infty} \frac{28x - 48}{(x-4)^2} = \frac{+}{+} 0 = 0^+ \ Por\_Encima$$

b) Estudia su monotonía (crecimientos y decrecimientos) localizándolos si los hubiera sus máximos/mínimos relativos. 10p

Habrá que estudiar el signo de la 1ª derivada: $f'(x) = \dfrac{-24x}{(x-4)^3}$

Los puntos críticos: $\begin{cases} -24x = 0 \to x = 0 \to Posible \ Máx. - min. \\ x = 4 \to \nexists f(x) \end{cases}$



$(-\infty, 0) \xrightarrow{-10} f'(x) = \frac{+}{-} = - < 0 \rightarrow \text{Decrece}$

$(0, 4) \xrightarrow{2} f'(x) = \frac{-}{-} = + > 0 \rightarrow \text{Crece}$

$(4, \infty) \xrightarrow{10} f'(x) = \frac{-}{+} = - < 0 \rightarrow \text{Decrece}$

Hay un mínimo en $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0,0)$

c) Traslada la información obtenida en los puntos anteriores al plano cartesiano. 5p