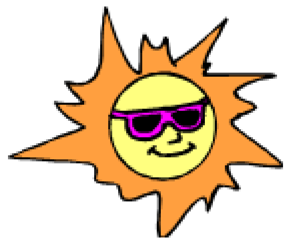

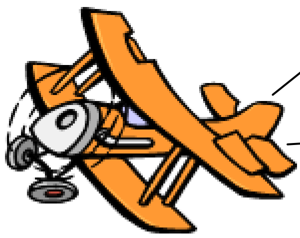

surtido de cálculo de verano

Imprescindible para estar en forma: "Surtido de verano"

Instituto Tierra Estella

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Te presentamos el surtido: VACACIONES DE VERANO.

Año tras año, al comienzo de cada curso, los profesores de Matemáticas venimos comprobando con preocupación, que los alumnos "han olvidado" durante las vacaciones de verano gran parte de los conceptos adquiridos, practicados y aprobados durante los cursos anteriores.

Esto plantea importantes dificultades para un adecuado progreso de aprendizaje, ya que, por un lado, las Matemáticas son una materia "acumulativa" (los nuevos conceptos necesitan apoyarse sobre conocimientos anteriores) y por otro lado, resulta imposible estar repasando continuamente ya que esto impediría avanzar en la materia y completar los programas oficiales establecidos para cada curso.

Para paliar en parte esta situación, el Departamento de Matemáticas del I.E.S. Tierra Estella, te presenta estas "ACTIVIDADES DE VERANO". En estos meses de vacaciones dispones de mucho tiempo y te proponemos que dediques una pequeña parte del mismo a realizar estos ejercicios, con el convencimiento de que ello va a resultar muy provechoso.

Si has aprobado te ayudará a afianzar conceptos y procedimientos ya adquiridos y **si has suspendido te puede servir de guía para repasar y practicar parte de la materia que deberás completar con las restantes partes estudiadas a lo largo del curso**.

Esta actividad está formada por una serie de ejercicios, fundamentalmente, sobre aspectos de cálculo. Los ejercicios insisten sobre todo en las "operaciones matemáticas" ya que su dominio es un aspecto básico para el desarrollo de la asignatura en todos los cursos. Es imprescindible operar con soltura, seguridad y rapidez y para ello el único camino es practicar y practicar.

Para un mejor aprovechamiento te aconsejamos hacer estos ejercicios pausadamente, pensando y razonando lo que haces y aplicando los procedimientos y métodos estudiados durante el curso. Si tienes alguna duda consulta con el cuaderno y el libro de texto y si todavía té queda alguna duda, pregunta a algún amigo o persona que te pueda ayudar (pero no le pidas que te haga los ejercicios y tu te limitas a copiar).

Esta actividad es VOLUNTARIA pero MUY RECOMENDABLE. Te animamos a hacer esta actividad y entregarla al profesor del próximo curso, quien la valorará y tendrá en cuenta como una actividad más del curso. Si has suspendido deberás entregar estos ejercicios a tu profesor en el examen de Septiembre.

Deseamos que esta propuesta sea provechosa para tus estudios el próximo curso y venideros. Con esa finalidad la hemos preparado y con esa esperanza te la ofrecemos.

Si al resolver los ejercicios encuentras algún error en las soluciones, anótalo y te rogamos que nos lo indiques el próximo curso.

Calcula la derivada de las funciones siguientes en los puntos dados aplicando la definición.

		Soluciones
1) $f(x)=2x^2-x$	en $x=1$	3
2) $f(x)=2(x^3-1)$	en $x=-1$	6
3) $y=\dfrac{-2}{x+1}$	en $x=1$	$1/2$
4) $f(x)=1+\dfrac{x}{x-1}$	en $x=0$	-1
5) $g(x)=\dfrac{3}{x^2}$	en $x=2$	$-3/4$
6) $y=\dfrac{4+x}{x^2}$	en $x=-2$	$3/4$

Recuerda: Derivada de la función f en un punto x_0

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Función derivada: $f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Calcula la función derivada aplicando la definición.

Funciones	Soluciones
7) $f(x)=-3x+5$	$f'(x)=-3$
8) $y=x^2-2x$	$y'=2x-2$
9) $g(x)=\dfrac{1}{x}$	$g'(x)=-1/x^2$

Calcula la derivada primera y la derivada segunda de las siguientes funciones.

Funciones	Soluciones
10) $y=2+\dfrac{x}{x+1}$	$y'=1/(x+1)^2$ $y''=-2/(x+1)^3$
11) $y=\dfrac{x^2}{2-x}$	$y'=x(4-x)/(x-2)^2$ $y''=8/(2-x)^3$
12) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$	$y'=4x/(x^2+1)^2$ $y''=4(1-3x^2)/(x^2+1)^3$
13) $y=\dfrac{x}{x^2-16}$	$y'=-(x^2+16)/(x^2-16)^2$ $y''=2x(x^2+48)/(x^2-16)^3$
14) $y=\dfrac{4}{x^2-1}$	$y'=-8x/(x^2-1)^2$ $y''=8(3x^2+1)/(x^2-1)^3$
15) $f(x)=x-4+\dfrac{10}{x+4}$	$y'=1-10/(x+4)^2$ $y''=20/(x+4)^3$

Derivada de un cociente

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{g(x)\cdot f'(x)-f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

y $\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)'=-\dfrac{f'(x)}{[f(x)]^2}$

Calcula la derivada de las funciones siguientes aplicando la derivación logarítmica.

Funciones	Soluciones
16) $y=\left(\frac{x}{a}\right)^{x}$	$y'=\left(\frac{x}{a}\right)^{x}\left[\ln\frac{x}{a}+1\right]$
17) $y=(2x)^{\operatorname{sen}x}$	$y'=(2x)^{\operatorname{sen}x}\left[\cos x\,\ln 2x+\frac{\operatorname{sen}x}{x}\right]$
18) $y=\left(\frac{1}{x}\right)^{\cos(2x)}$	$y'=\left(\frac{1}{x}\right)^{\cos 2x}\left[-2\operatorname{sen}2x\ln\frac{1}{x}-\frac{\cos 2x}{x}\right]$
19) $y=\sqrt[4]{\frac{(1+2x)^3}{(1-2x)^2}}$	$y'=\frac{5-2x}{2(1-4x^2)}\sqrt[4]{\frac{(1+2x)^3}{(1-2x)}}$

Recuerda:
① Toma logaritmos neperianos en los dos miembros y aplica las propiedades de los logaritmos.
② Deriva los dos miembros.
③ Despeja y sustituye.

Calcula las derivadas de las funciones.

Funciones	Soluciones
20) $y=\frac{3x^2}{2}$	$y'=3x$
21) $y=3x^4-\frac{x^2}{2}+4$	$y'=12x^3-x$
22) $y=\frac{2}{x^2}$	$y'=\frac{-4}{x^3}$
23) $y=\sqrt{1-x^2}$	$y'=-x/\sqrt{1-x^2}$
24) $y=2\sqrt[3]{x}$	$y'=\frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}$
25) $y=\frac{1}{x}\sqrt{x}$	$y'=-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$
26) $y=(3+x)^8$	$y'=8(3+x)^7$
27) $y=(2x-1)^6$	$y'=12(2x-1)^5$
28) $y=3^{x^2+5}$	$y'=3^{x^2+5}(2x)\ln 3$
29) $y=-5^{2x}$	$y'=-2\cdot 5^{2x}\ln 5$
30) $y=\operatorname{sen}x^{-2}$	$y'=-\frac{2\cos x^{-2}}{x^3}$
31) $y=\cos(-4x)$	$y'=4\operatorname{sen}(-4x)$
32) $y=\operatorname{tg}e^x$	$y'=\frac{e^x}{\cos^2 e^x}$
33) $y=\operatorname{cotg}x^2$	$y'=-\frac{2x}{\operatorname{sen}^2 x^2}$
34) $y=2\sec(-x)$	$y'=\frac{-2\operatorname{sen}(-x)}{\cos^2(-x)}$
35) $y=\operatorname{cosec}\frac{x}{2}$	$y'=-\frac{\cos(x/2)}{2\operatorname{sen}^2(x/2)}$

Repasa la tabla de las derivadas. Analiza que función tienes y aplica lo que has aprendido con cuidado y fijándote en lo que vas haciendo.

36) $y = \text{arc sen}\,\sqrt{x}$	$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$
37) $y = \text{arc cos}\,(1-x)$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$
38) $y = \text{arc tg}\,\dfrac{1}{x}$	$y' = \dfrac{-1}{x^2+1}$
39) $y = \log(3+x)$	$y' = \dfrac{1}{(x+3)\ln 10}$
40) $y = \ln(x^2-2x)$	$y' = \dfrac{2x-2}{x^2-2x}$
41) $y = \log_3\,(1+x^2)$	$y' = \dfrac{2x}{(1+x^2)\ln 3}$
42) $y = 3^x \cdot x^3$	$y' = 3^x\left(x^3\ln 3 + 3x^2\right)$
43) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$y' = \dfrac{-x}{(x^2-1)^{3/2}}$
44) $y = e^{\ln(2x)}$	$y' = \dfrac{e^{\ln 2x}}{x}$
45) $y = \dfrac{\cos(x^2+\pi)}{2}$	$y' = -x\,\text{Sen}\left(x^2+\pi\right)$
46) $y = \dfrac{\sqrt{x+2}}{x^2}$	$y' = -\dfrac{3x+8}{2x^3\sqrt{x+2}}$
47) $y = \dfrac{x}{x^2-1}$	$y' = -\dfrac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$
48) $y = \ln(1-x)^2$	$y' = \dfrac{-2}{1-x}$
49) $y = \ln^2(1-x)$	$y' = \dfrac{-2\ln(1-x)}{1-x}$
50) $y = \text{sen}\,(\text{tg}\,(2x))$	$y' = \dfrac{2\cos\,(\text{tg}\,(2x))}{\cos^2(2x)}$
51) $y = \cos^5\dfrac{x}{5}$	$y' = -\cos^4\dfrac{x}{5}\,\text{sen}\,\dfrac{x}{5}$
52) $y = \cos\dfrac{x^5}{5}$	$y' = -x^4\,\text{sen}\,\dfrac{x^5}{5}$
53) $y = 5x\cos\dfrac{x}{5}$	$y' = 5\cos\dfrac{x}{5} - x\,\text{sen}\,\dfrac{x}{5}$
54) $y = \sec\,(2x)$	$y' = \dfrac{2\,\text{sen}\,(2x)}{\cos^2(2x)}$
55) $y = \text{cosec}\,(e^{-x})$	$y' = \dfrac{e^{-x}\cos e^{-x}}{\text{sen}^2 e^{-x}}$
56) $y = \sqrt[3]{x^3-5}$	$y' = \dfrac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3-5)^2}}$
57) $y = \ln(\text{tg}^2\,x)$	$y' = \dfrac{2(1+\text{tg}^2 x)}{\text{tg}\,x}$
58) $y = x\,\text{sen}\,x + \cos x$	$y' = x\cos x$

59) $y = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$	$y' = 2x - \dfrac{2}{x^3}$
60) $y = -\dfrac{3}{\sqrt{3x}}$	$y' = \dfrac{3}{2x\sqrt{3x}}$
61) $y = e^{3x} + 2e^{-x}$	$y' = 3e^{3x} - 2e^{-x}$
62) $y = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$	$y' = \dfrac{-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}\,(x-1)^2}$
63) $y = \ln \dfrac{1}{1-x^2}$	$y' = \dfrac{2x}{1-x^2}$
64) $y = (1-x^3)\cos x$	$y' = -3x^2\cos x - (1-x^3)\operatorname{sen} x$
65) $y = 3^{1/x}$	$y' = -\dfrac{3^{1/x}\ln 3}{x^2}$
66) $y = 2(3x^2-1)^4$	$y' = 48\,x(3x^2-1)^3$
67) $y = 2\operatorname{sen} x^2$	$y' = 4x\cos x^2$
68) $y = 2\operatorname{sen}^2 x$	$y' = 4\operatorname{sen} x \cos x$
69) $y = \operatorname{sen}(2x^2)$	$y' = 4x\cos(2x^2)$
70) $y = \operatorname{sen}^2(2x)$	$y' = 4\operatorname{sen}(2x)\cos(2x)$
71) $y = \operatorname{sen}^2 x^2$	$y' = 4x\operatorname{sen} x^2 \cos x^2$
72) $y = x^2 \cdot e^{-x}$	$y' = e^{-x}(2x - x^2)$
73) $y = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{3x^2}{6} + 24$	$y' = x^3 - x$
74) $y = \ln \sqrt[3]{x}$	$y' = \dfrac{1}{3x}$
75) $y = \dfrac{x^{-5}}{10}$	$y' = -\dfrac{1}{2x^6}$
76) $y = e^{\ln \operatorname{sen}^2 x}$	$y' = 2e^{\ln \operatorname{sen}^2 x}\operatorname{cotg} x$
77) $y = (1-x)\sqrt{1+x}$	$y' = -\dfrac{3x+1}{2\sqrt{x+1}}$
78) $y = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$y' = \dfrac{2\operatorname{sen} x}{\cos^3 x}$
79) $y = \ln\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$	$y' = -\dfrac{2}{x}$
80) $y = \dfrac{\operatorname{sen} x - 1}{\cos x - 1}$	$y' = \dfrac{1 - \cos x - \operatorname{sen} x}{(\cos x - 1)^2}$
81) $y = \cos(\operatorname{cotg} x)$	$y' = \dfrac{\operatorname{sen}(\operatorname{cotg} x)}{\operatorname{sen}^2 x}$
82) $y = 2x \cdot e^{2x}$	$y' = e^{2x}(4x+2)$
83) $y = \sqrt{4+2^x}$	$y' = \dfrac{2^{x-1}\ln 2}{\sqrt{2^x+4}}$
84) $y = 2 - x - \dfrac{1}{2x^3}$	$y' = \dfrac{3}{2x^4} - 1$
85) $y = 2\operatorname{sen}^2\dfrac{x}{2} + 2\cos^2\dfrac{x}{2}$	$y' = 0$

86) $y = \ln \text{sen } x^3$	$y' = 3x^2 \cot g\, x^3$
87) $y = (1 - \text{sen } x)\ \text{tg } x$	$y' = \frac{1 - \text{sen } x}{\cos^2 x} - \text{sen } x$
88) $y = 4^x \cdot 6^x$	$y' = 24^x \ln 24$
89) $y = \ln \frac{e}{1+x}$	$y' = \frac{-1}{x+1}$
90) $y = \left(\frac{e}{x}\right)^{x^2}$	$y' = \left(\frac{e}{x}\right)^{x^2} (x - 2x \ln x)$
91) $y = \sqrt{\frac{6}{x}}$	$y' = -\frac{\sqrt{6x}}{2x^2}$
92) $y = -(x+2)(x-2)(4-x)$	$y' = 3x^2 - 8x - 4$
93) $y = (1-x)e^{-x}$	$y' = e^{-x}(x-2)$
94) $y = \ln \frac{\text{sen } x}{\cos x} + e^{2x}$	$y' = 2e^{2x} + \frac{1}{\text{sen } x \cos x}$
95) $y = \text{tg}^2 \frac{x}{2}$	$y' = \frac{\text{tg } x/2}{\cos^2 x/2}$
96) $y = \frac{\ln x}{x^2}$	$y' = \frac{1 - 2\ln x}{x^3}$
97) $y = x^2 \ln x + x \ln x^2$	$y' = (2x+2)\ln x + x + 2$
98) $y = a\,\text{sen } (bx)$	$y' = ab\cos(b)x$
99) $y = \log_2 4^x$	$y' = 2$
100) $y = \cos^2 (2x+1)^3$	$y' = -12(2x+1)^2 \cos(2x+1)^3 \text{sen}(2x+1)^3$
101) $y = 4x^3 - x + \frac{1}{e^x}$	$y' = +12x^2 - 1 - \frac{1}{e^x}$
102) $y = x - \frac{k}{x}$	$y' = 1 + \frac{k}{x^2}$
103) $y = x^3\ \text{sen} \frac{x}{3}$	$y' = 3x^2 \text{sen} \frac{x}{3} + \frac{x^3}{3} \cos \frac{x}{3}$
104) $y = (\text{sen } (2x))^{\cos x}$	$y' = (\text{sen } 2x)^{\text{Cos } x} \cdot \left[\frac{2\cos x \cos 2x}{\text{sen } 2x} - \text{sen } x \ln(\text{sen } 2x)\right]$
105) $y = \ln \frac{x+1}{1-x}$	$y' = \frac{2}{1-x^2}$
106) $y = \frac{x^2+3}{x^2-1}$	$y' = -8x/(x^2-1)^2$
107) $y = \sec 3^x$	$y' = \sec 3^x\ \text{tg } 3^x \cdot 3^x \cdot \ln 3$
108) $y = \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^2}$	$y' = \frac{x^3 + x - 2}{x^3}$
109) $y = \sqrt{e^{x^2} \cdot \text{tg } x}$	$y' = \sqrt{e^{x^2} \text{tg } x}\left(x + \frac{1}{2\,\text{sen } x\ \text{cox } x}\right)$

Calcular el valor que toma la derivada de la función en los puntos que se indican.

	Soluciones
110) $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ para $x = 3$	$y'(3) = \sqrt{10}/10$
111) $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ para $x = 0$	$y'(0) = 1$
112) $y = (\operatorname{sen} x + \cos x)^4$ para $x = 0$	$y'(0) = 4$
113) $y = e^{\operatorname{sen}(2x)}$ para $x = \pi/4$	$y'(\pi/4) = 0$
114) $y = \ln x^x$ para $x = e$	$y'(e) = 2$
115) $y = \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi\sqrt{x}}{3}\right)$ para $x = 1$	$y'(1) = \pi/12$

Calcula la derivada de la función y sustituye el valor de x

Estudia el crecimiento y decrecimiento y la concavidad y convexidad de las siguientes funciones.

Recuerda:

Crecimiento y decrecimiento → estudio del signo de la derivada primera.

Concavidad y convexidad → estudio del signo de la derivada segunda

Funciones	Soluciones. Ayuda: Puntos de la recta
116) $y = \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 - 2x + 1$	$y' = 0 \to x = -2$ y $x = 1$ $y'' = 0 \to x = -1/2$
117) $y = \dfrac{x^2 + 1}{x}$	$y' = 0 \to x = -1$ y $x = 1$, $x = 0$ $y'' = 0 \to$ Nunca, $x = 0$
118) $y = \dfrac{x}{(x-1)^2}$	$y' = 0 \to x = -1$, $x = 1$ $y'' = 0 \to x = -2$, $x = 1$
119) $y = \dfrac{x^2}{1 - x}$	$y' = 0 \to x = 2$ y $x = 0$, $x = 1$ $y'' = 0 \to$ Nunca, $x = 1$
120) $y = \dfrac{x^3 + 1}{x}$	$y' = 0 \to x = \dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}$, $x = 0$ $y'' = 0 \to x = -1$, $x = 0$
121) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$	$y' = 0 \to$ Nunca, $x = 0$ $y'' = 0 \to$ Nunca, $x = 0$

Si deseas adquirir mayor dominio plantéate por segunda vez algunos de estos ejercicios. Escribe los enunciados y adelante.