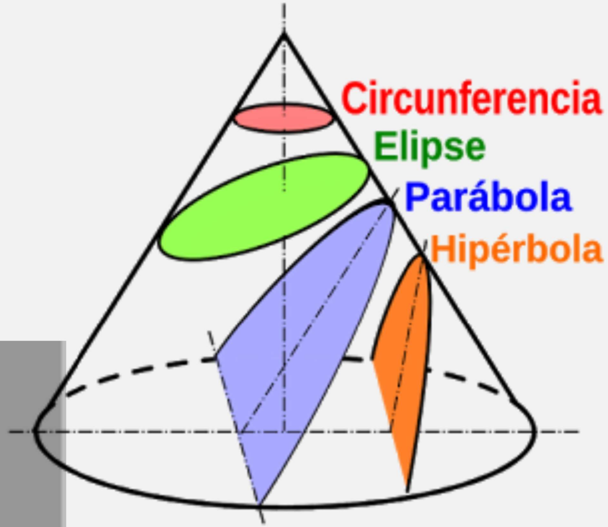
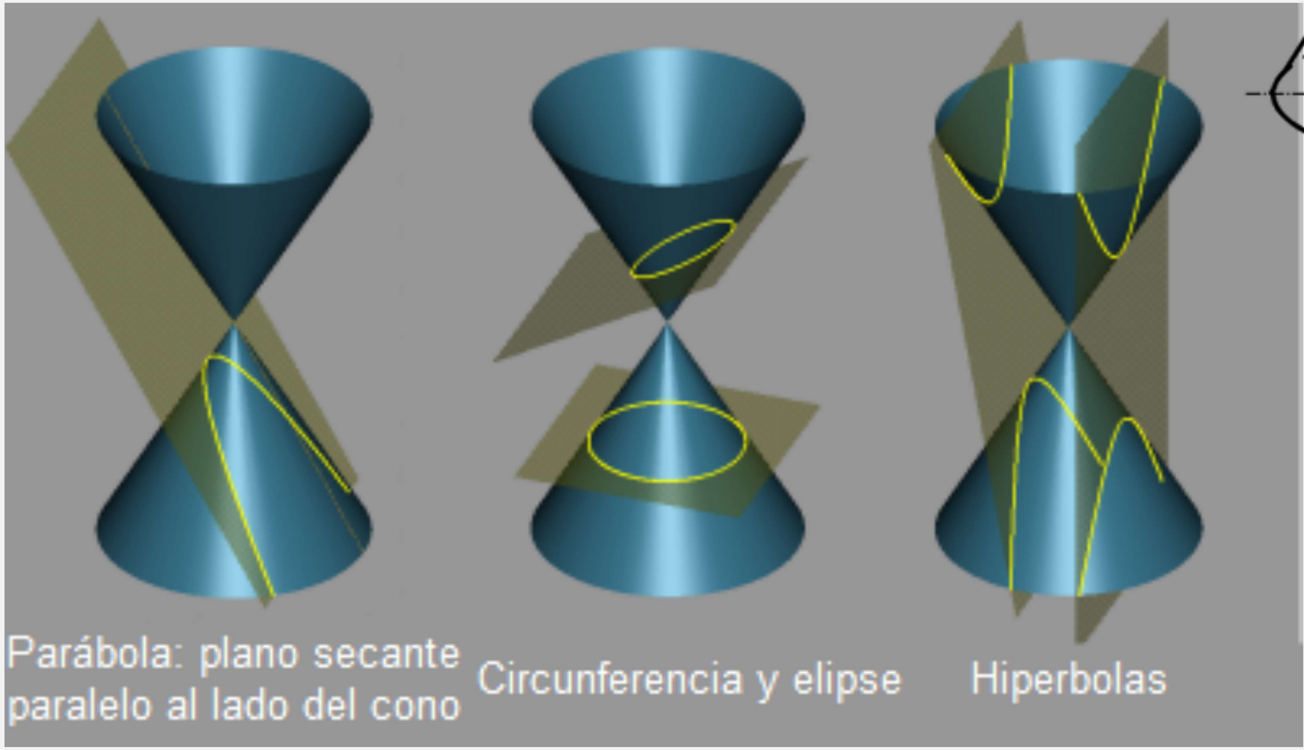
LAS CÓNICAS





Matemáticas I
1.º Bcht.

Las cónicas las podemos estudiar de distintas maneras:

Se pueden estudiar como hicieron los griegos, como has visto en las figuras anteriores, en términos de intersecciones del cono con planos.

Se pueden estudiar como casos particulares de ecuaciones de segundo grado con dos variables x e y

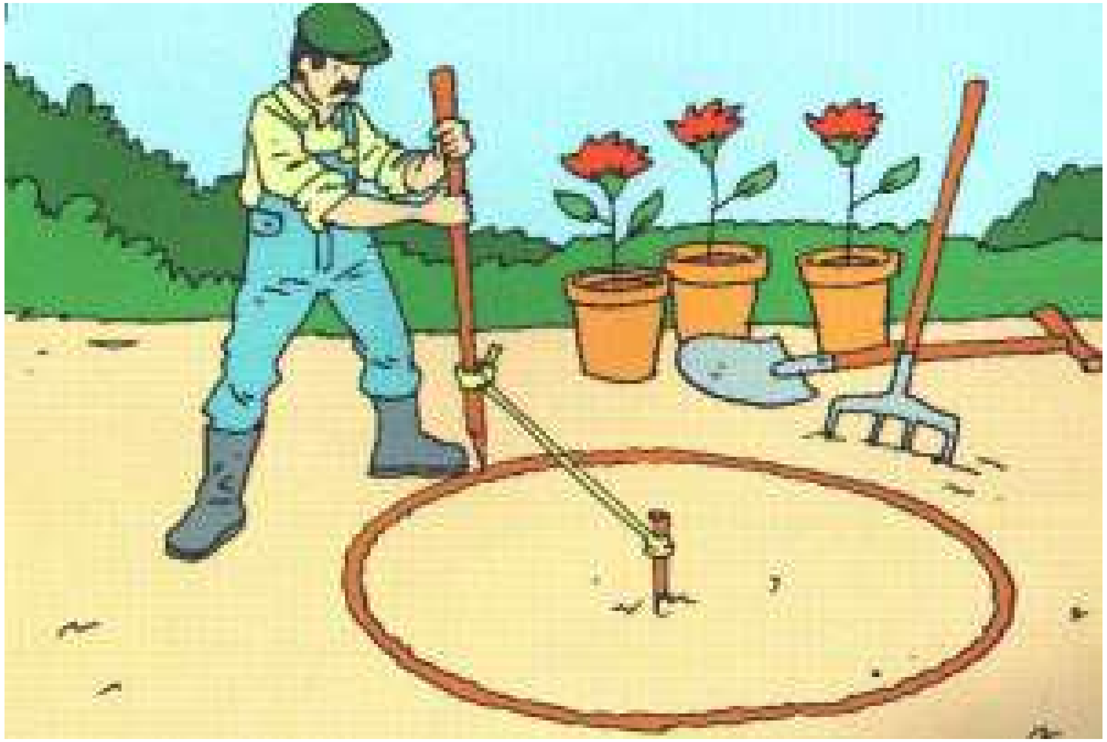
$$A\,x^2 + B\,x\,y + C\,y^2 + D\,x + E\,y + F = 0$$

Sin embargo en este nivel, como continuación del capítulo de métrica en el plano, es más adecuado estudiarlas como lugares geométricos de puntos que cumplen cierta propiedad geométrica

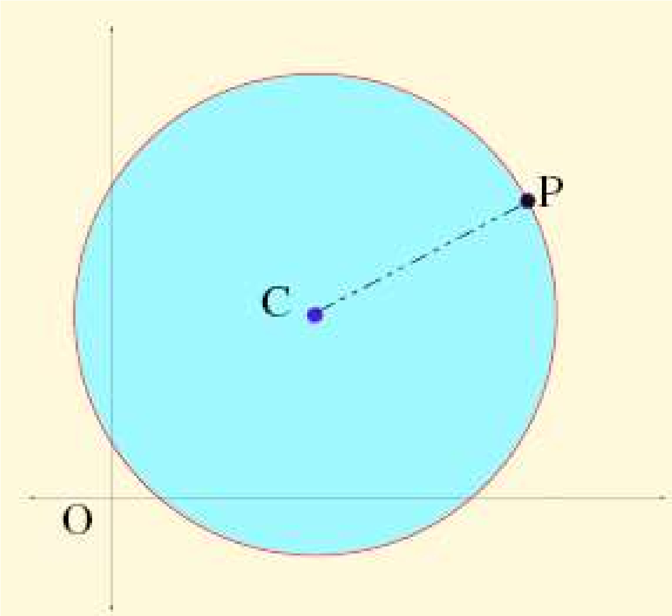
La Circunferencia

Definición *Una circunferencia es el lugar geométrico de los $P(x, y)$ que equidistan de un punto fijo C llamado (centro)*

$$d(P, C) = cte = radio$$



La Circunferencia



Si P(x,y) y C(x0, y0) entonces tenemos:

d(P,C) = $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=r$

Elevando al cuadrado tenemos la ecuación de la circunferencia:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$$

Si desarrollamos esta expresión llegamos a una expresión de segundo grado en x e y:

$\boxed{x^2+y^2+Ax+By+C=0}$ $A=-2a$ $B=-2b$ $C=a^2+b^2-r^2$

Si el centro de la circunferencia fuese el origen de coordenadas, tendríamos:

$$x^2+y^2=r^2$$

Posiciones relativas de una recta y una circunferencia

Si desde un punto $P(x,y)$ trazamos una recta t, será tangente a una circunferencia cuando la distancia del centro a la recta coincida con el radio.

- la recta es tangente si

$$d(C,t) = radio$$

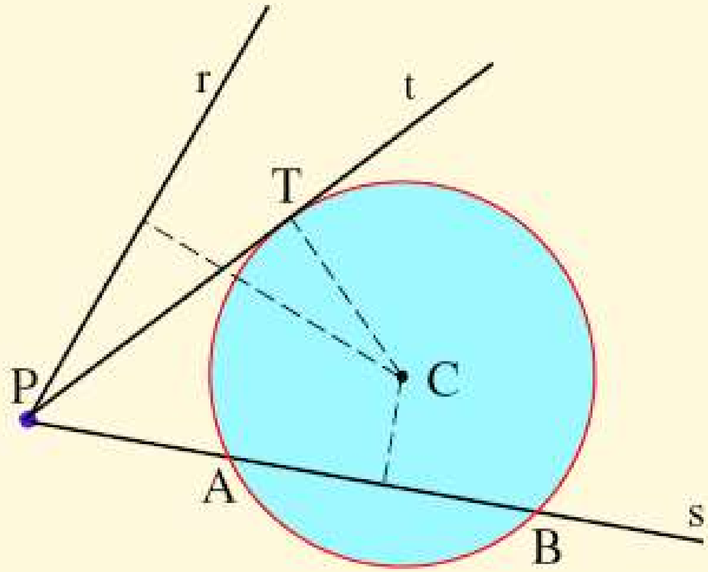
- la recta se llama exterior si

$$d(C,r) > radio$$

- la recta se llama secante si

$$d(C,s) < radio$$

la intersecta en dos puntos A y B.



Ejemplo Comprobar que la recta $s \equiv 4x - 3y + 6 = 0$ es tangente a la circunferencia

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$$

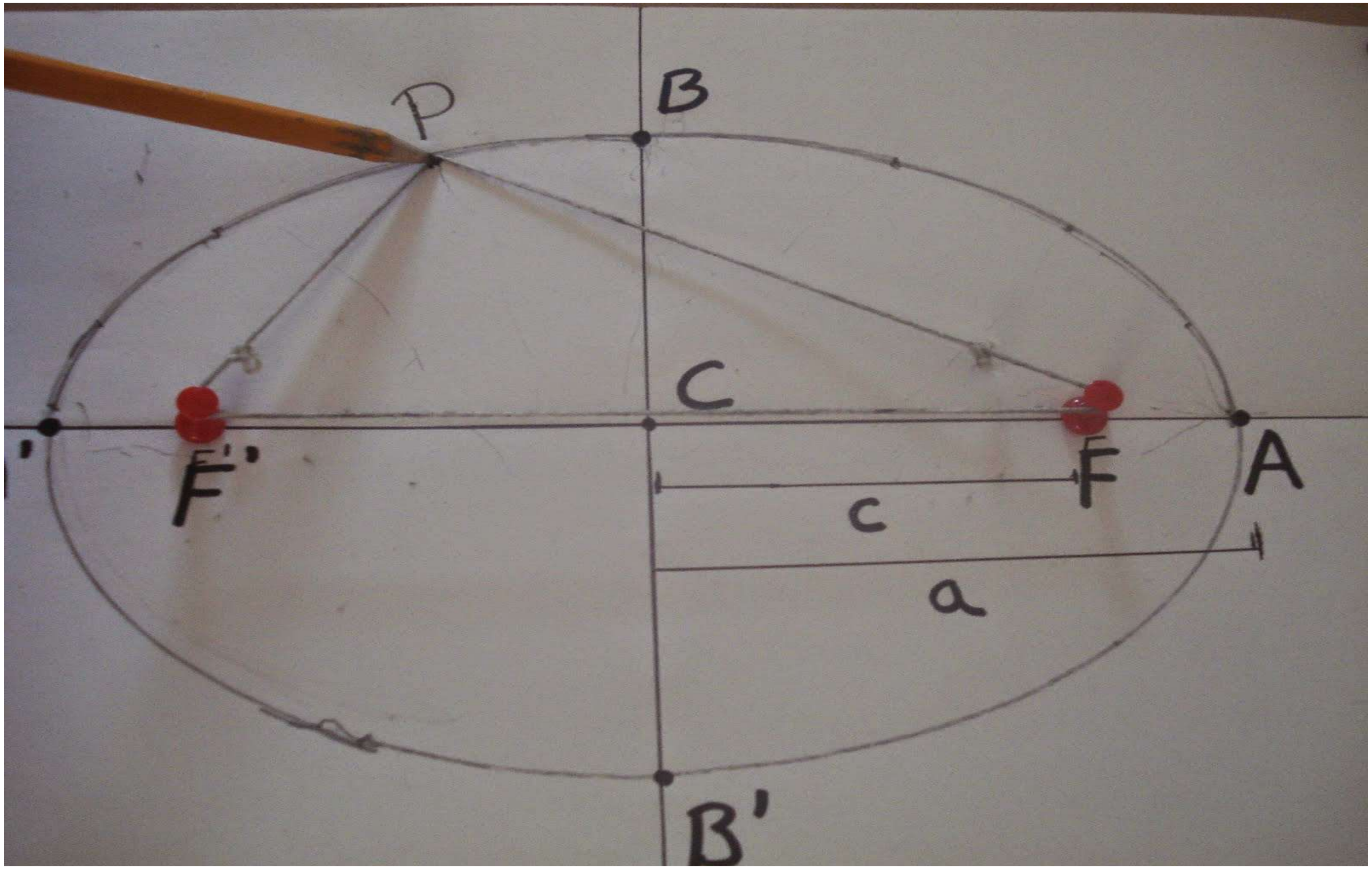
Solución: Veamos que el radio coincide con la distancia del centro a la recta dada

$$d(C;s) = \frac{|4\,(2) - 3\,(3) + 6|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{5}{\sqrt{25}} = 1 = \text{ radio}$$

La Elipse

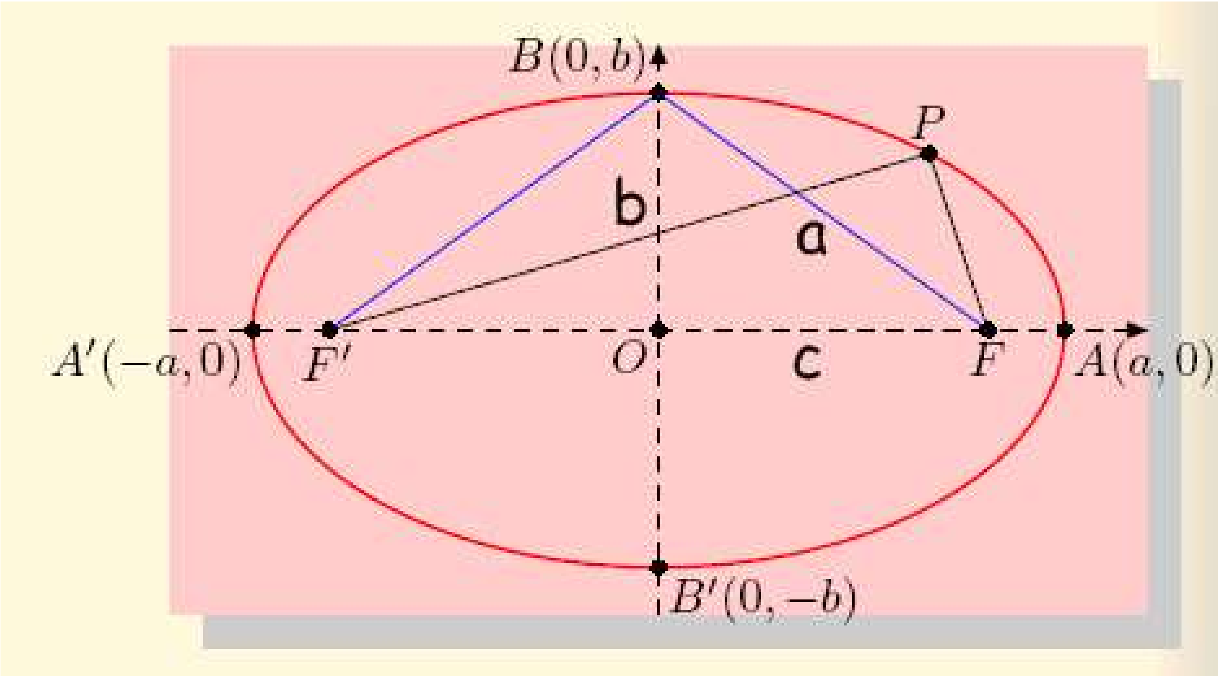
Definición *Una elipse es el lugar geométrico de los $P(x,y)$ cuya suma de distancias a dos puntos fijos F y F' (focos) es constante*

$$|PF| + |PF'| = cte = 2a$$



La Elipse

Con los focos en OX



- a es el semieje mayor
- b es el semieje menor
- focos $F(c,0)\ F'(-c,0)$
- el centro es $O(0,0)$
- vértices A, A', B, B'
- En el gráfico se tiene

$$BF = a$$

$$OB = b \quad OF = c$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

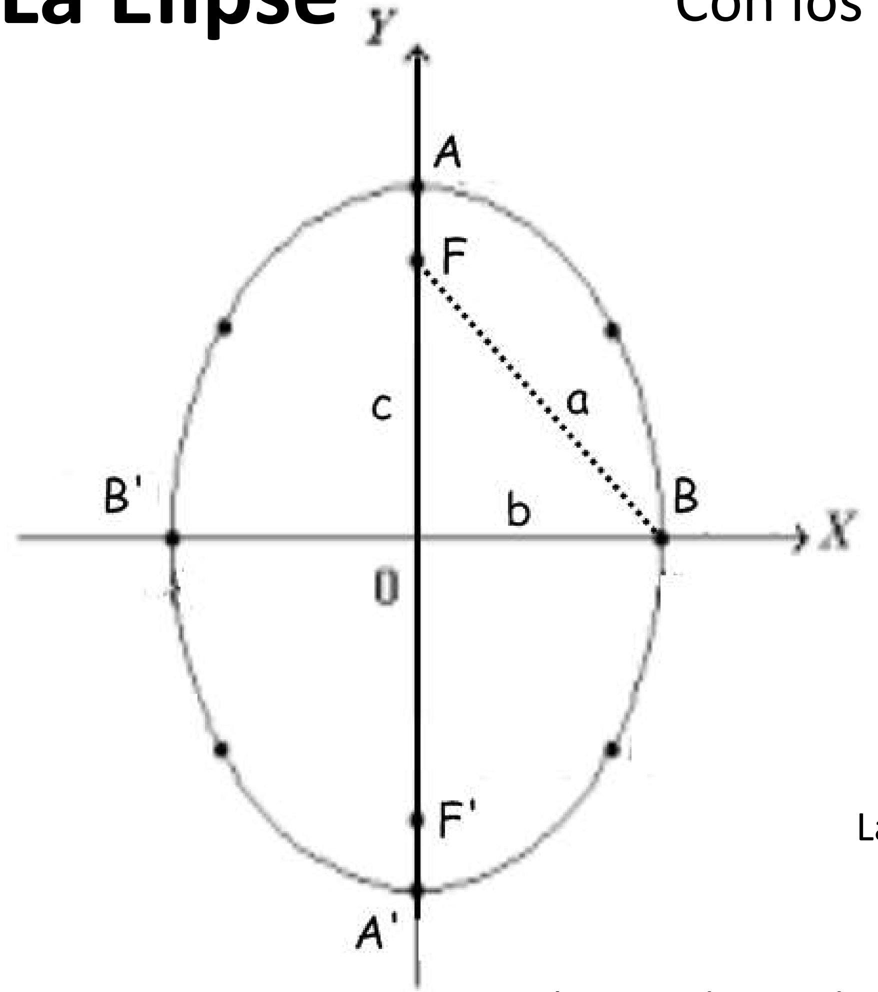
La ecuación reducida de la elipse centrada en:

- el origen de coordenadas y con eje mayor en OX: $$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$
- el punto O(h,k) y con eje mayor paralelo a OX: $$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1}$$

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

La Elipse

Con los focos en OY



- a es el semieje mayor
- b es el semieje menor
- focos F(0, c) F'(0, -c)
- el centro es $O(0,0)$
- vértices A, A', B, B'
- En el gráfico se tiene

$$BF = a$$

$$OB = b \quad OF = c$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

La ecuación reducida de la elipse centrada en:

- el origen de coordenadas y con eje mayor en OY: $\boxed{\dfrac{y^2}{a^2} + \dfrac{x^2}{b^2} = 1}$

- el punto O(h, k) y con eje mayor paralelo a OY: $\boxed{\dfrac{(y-k)^2}{a^2} + \dfrac{(x-h)^2}{b^2} = 1}$

La Elipse

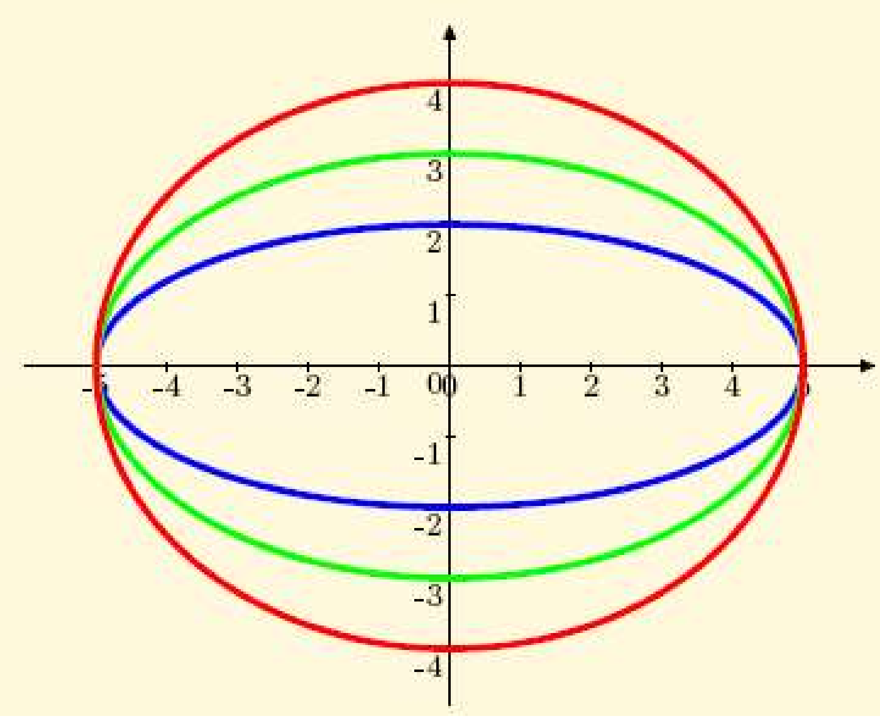
Llamamos *excentricidad* **e** de una elipse al cociente entre la distancia focal y el eje mayor.

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} < 1$$

La excentricidad mide el grado de achatamiento de la elipse

- $e = 0{,}6$
- $e = 0{,}8$
- $e = 0{,}9165$

Cuanto mas cerca está e de uno , más achatada está. Si $e = 0$, la elipse es una circunferencia

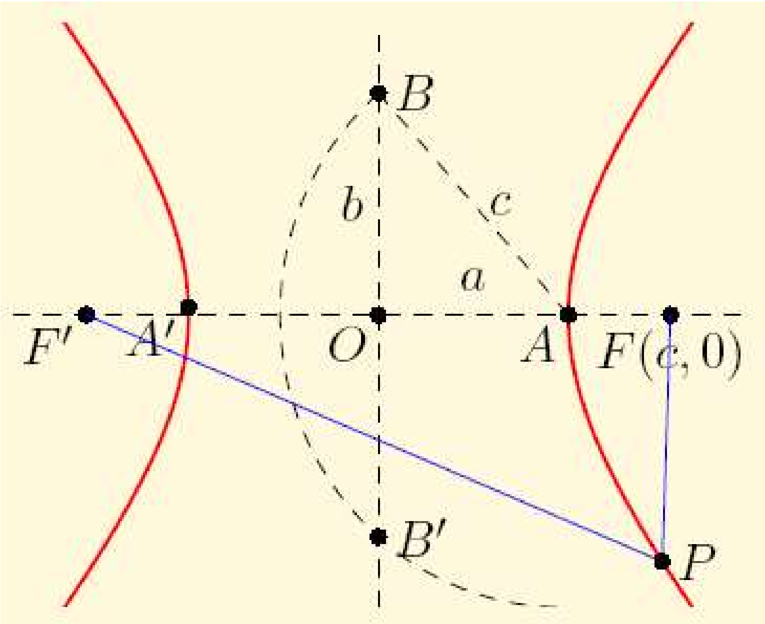


Dos elipses con la misma excentricidad son semejantes, tienen la misma forma.

La Hipérbola

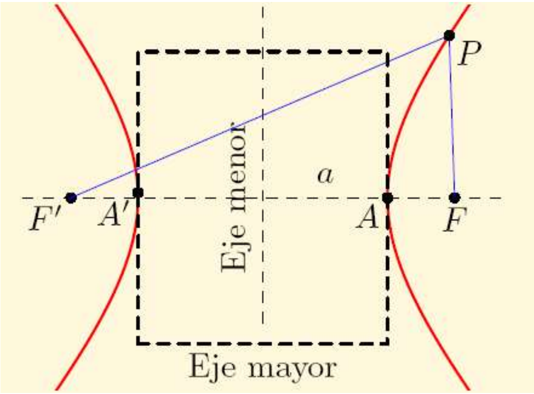
Definición *Una hipérbola es el lugar geométrico de los $P(x,y)$ cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos F y F' (focos) es constante*

$$|PF| - |PF'| = cte = \pm 2a$$



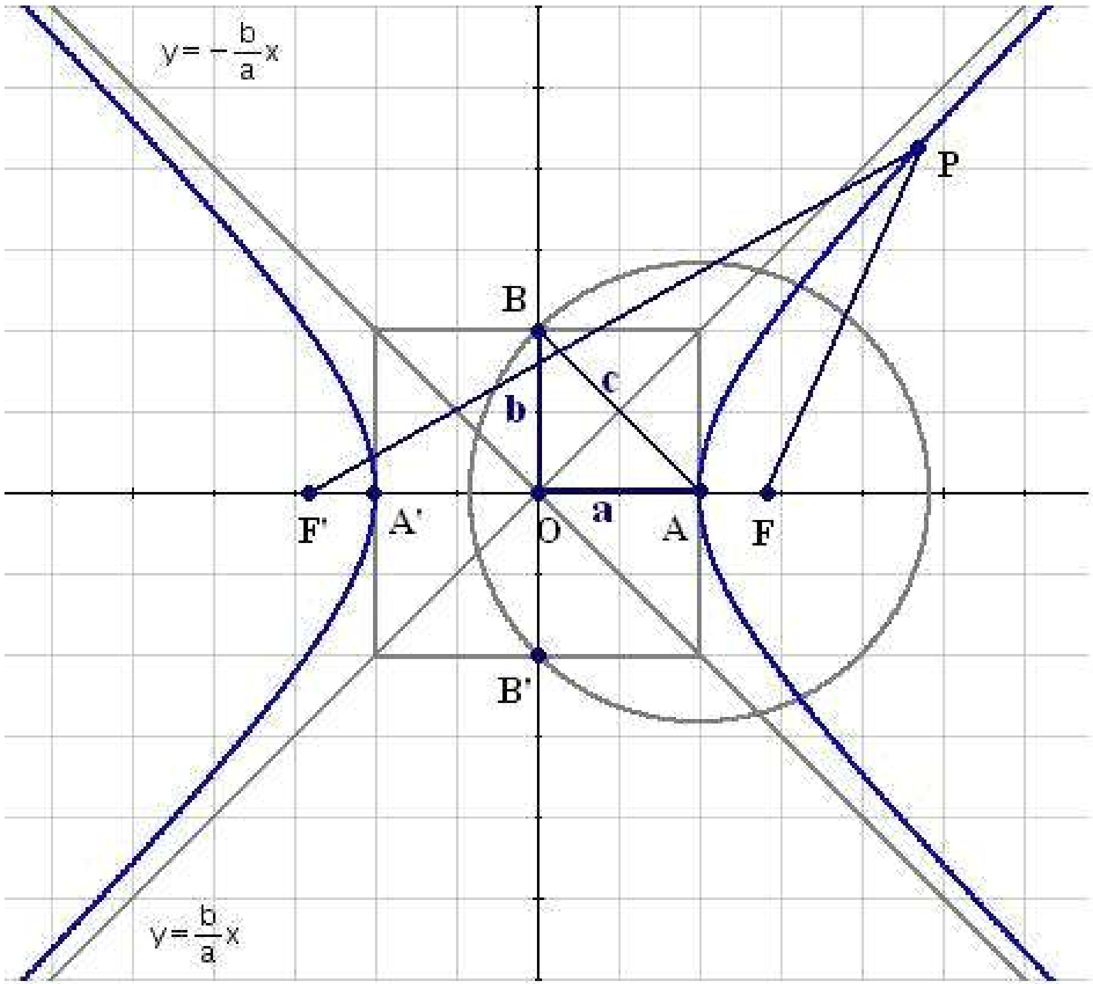
- a es el semieje mayor
- b es el semieje menor
- focos $F(c,0)\,F'(-c,0)$
- vértices A, A', B, B'
- B y B' son los cortes de la circunferencia con centro en A y radio c.

$$c^2 = a^2 + b^2$$



La Hipérbola

Una hipérbola tiene dos asíntotas de ecuaciones respectivas $y = \frac{b}{a}x$ y $y = -\frac{b}{a}x$.



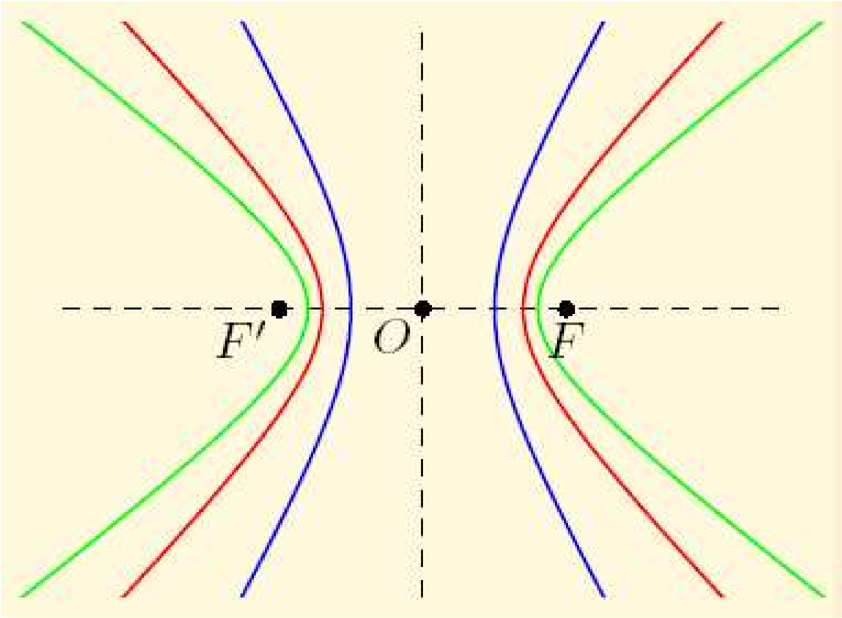
La Hipérbola

Llamamos *excentricidad* **e** de una hipérbola al cociente entre la distancia focal y el eje mayor.

$$e = \frac{c}{a} > 1$$

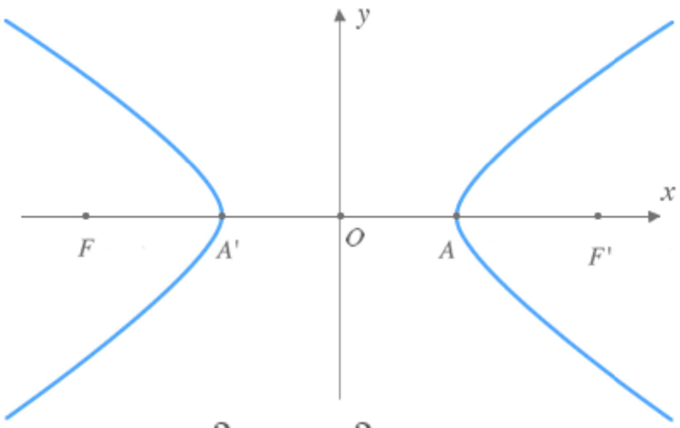
La excentricidad nos da información sobre la abertura de las ramas de la hipérbola.

A medida que la excentricidad aumenta cada vez son más verticales las ramas de la hipérbola.

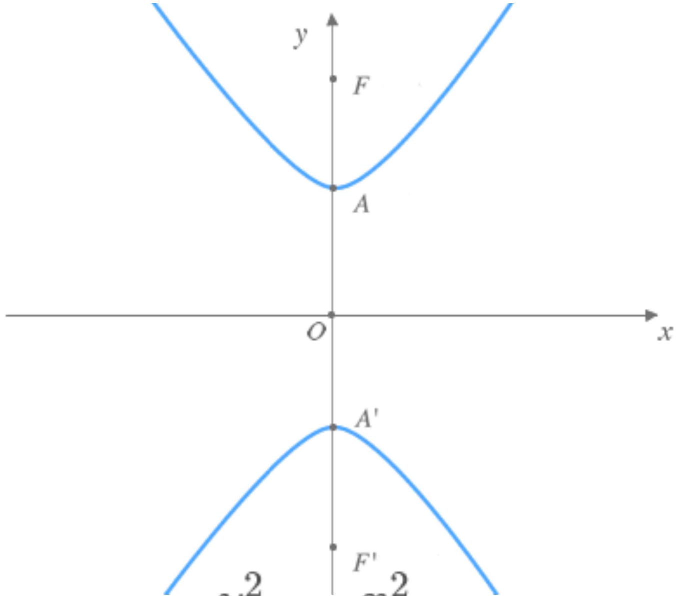


Dos hipérbolas con la misma excentricidad son semejantes, tienen la misma forma.

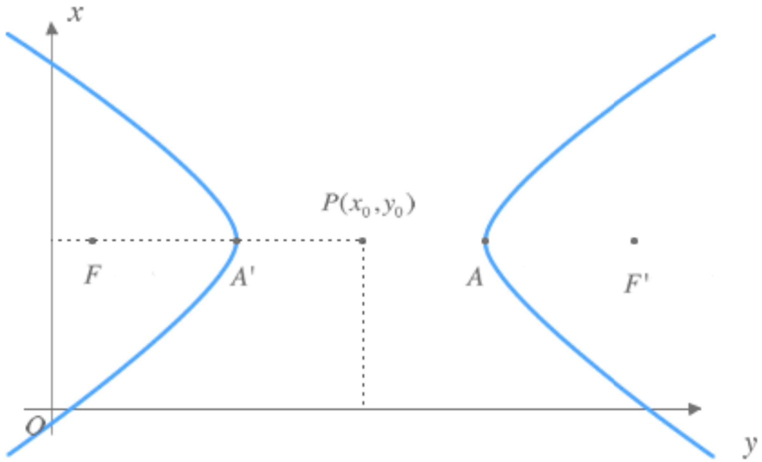
La Hipérbola



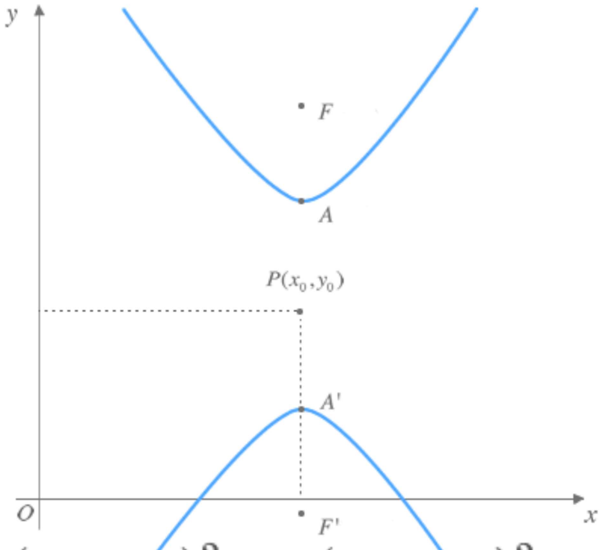
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$



$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

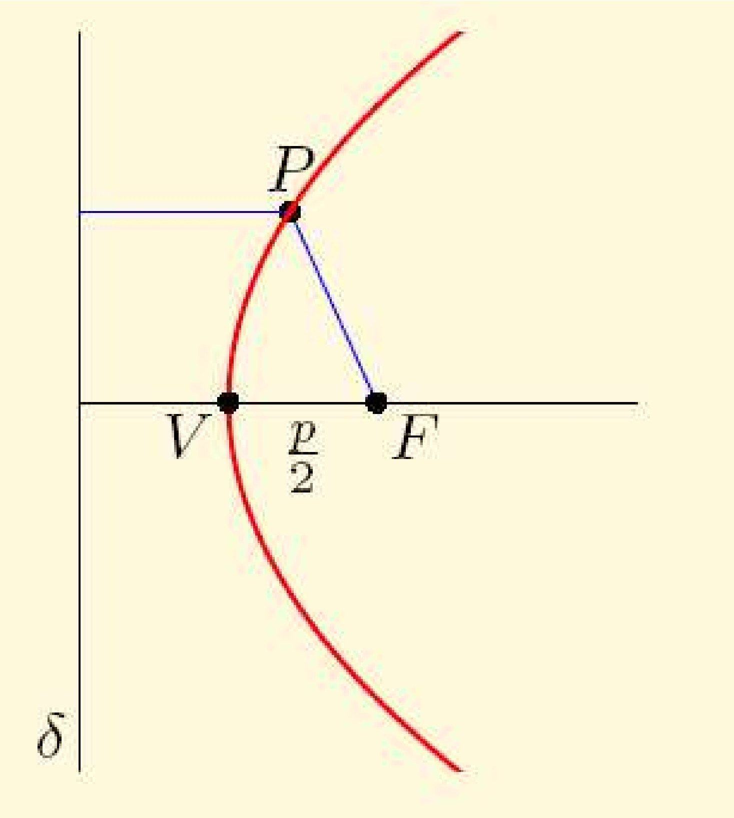


$$\frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1$$

La Parábola

Definición *Una parábola es el lugar geométrico de los $P(x, y)$ que equidistan de un recta fija δ (directriz) y de un punto fijo F (foco).*

$$|PF| = d(P, \delta|$$



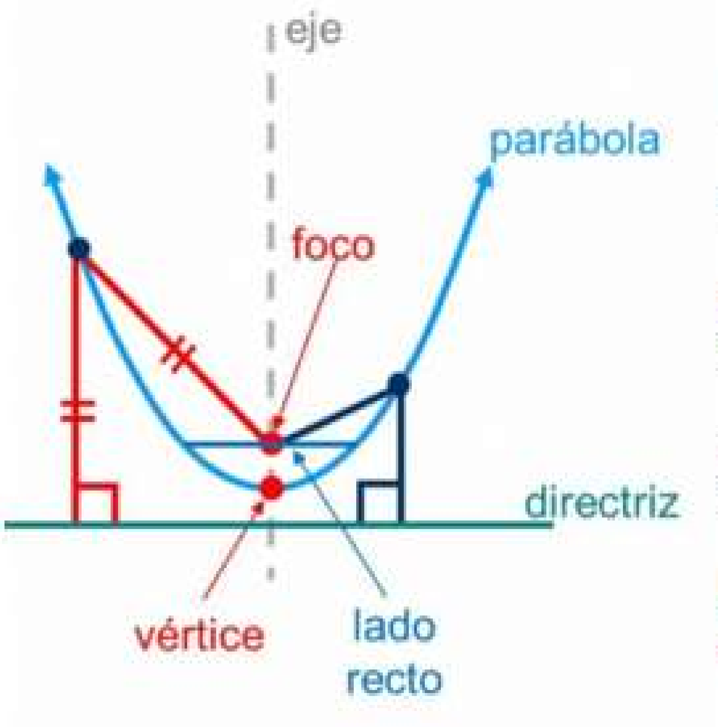
Elementos de la parábola

- recta VF es el eje
- Foco $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$
- El vértice es $V(0, 0)$
- Directriz $\delta \equiv x = -\frac{p}{2}$
- $\overline{VF} = -\frac{p}{2}$

Todas las parábolas son semejantes, tienen la misma forma, pues todas tienen excentricidad 1.

La Parábola

La Parábola que es el conjunto de todos los puntos en un plano que equidistan de un punto fijo y una recta fija.



Foco (F) es el punto fijo.

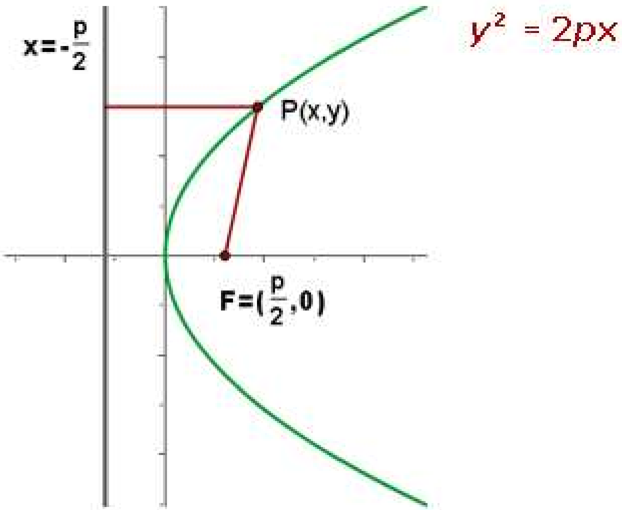
Directriz (D) es la recta fija.

Eje es la línea que pasa por el foco y es perpendicular a la directriz.

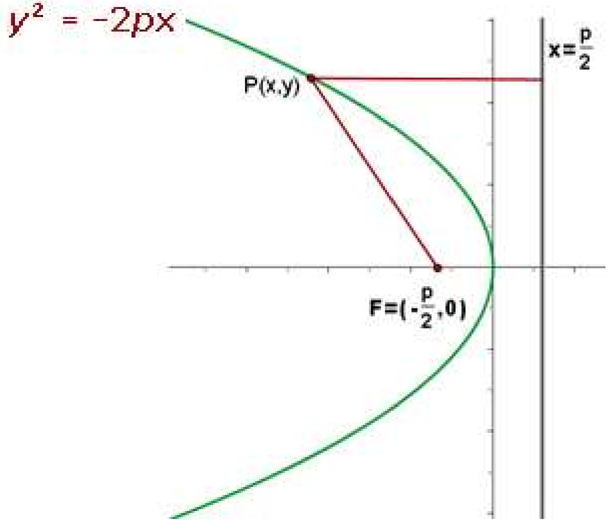
Vértice es el punto medio del segmento que va del foco a la directriz.

Lado recto es el segmento perpendicular al eje que une dos puntos en la parábola pasando por el foco.

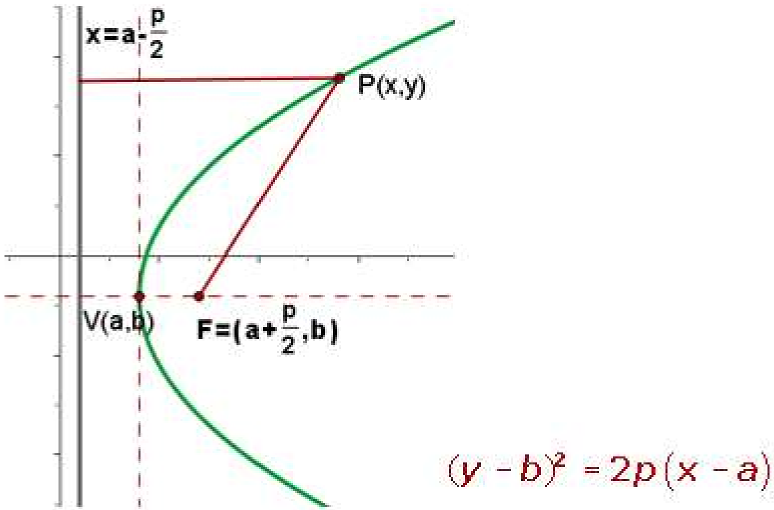
La Parábola



x=-p/2
P(x,y)
F=(p/2,0)
$y^2 = 2px$

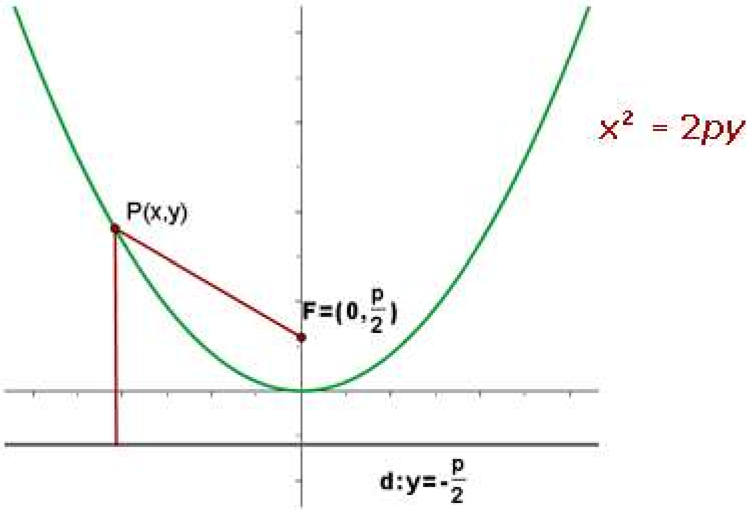


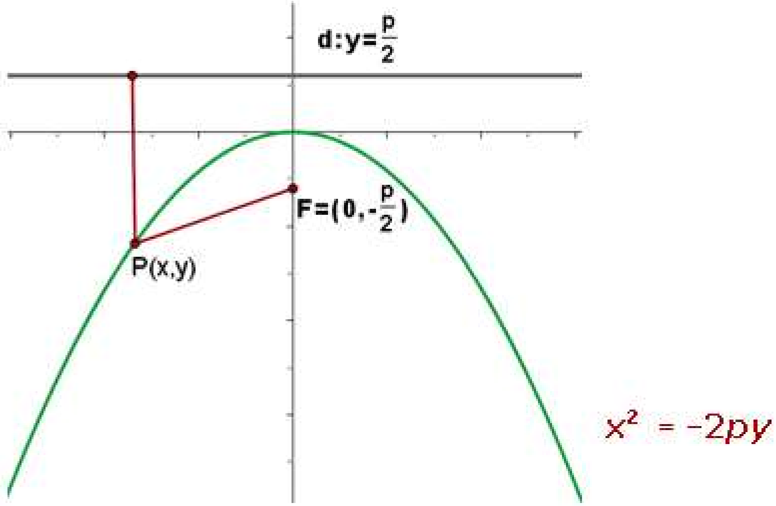
$y^2 = -2px$
x=p/2
P(x,y)
F=(-p/2,0)

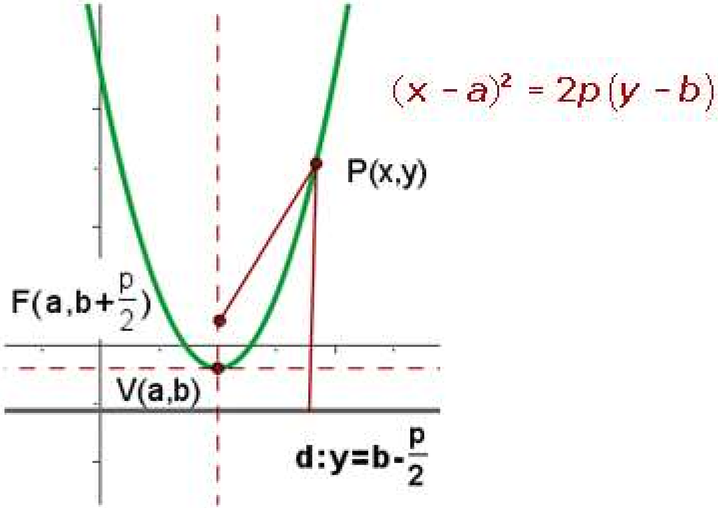


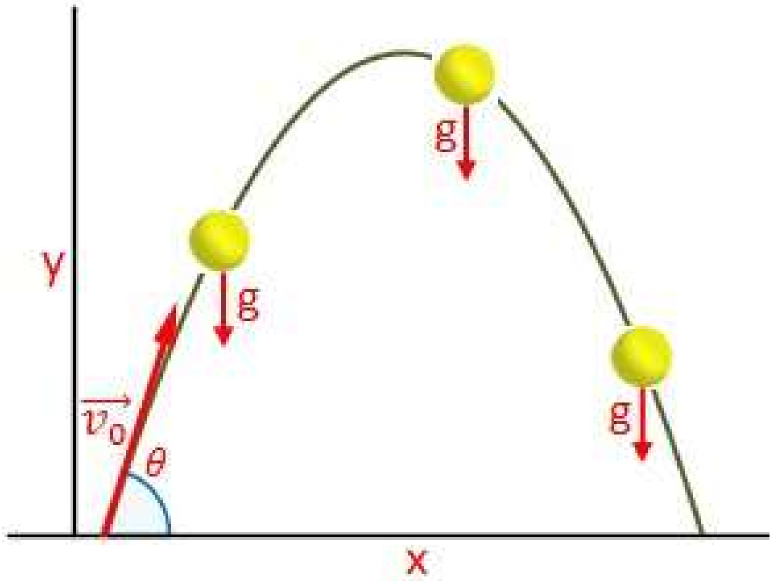
x=a-p/2
P(x,y)
V(a,b)
F=(a+p/2,b)
$(y-b)^2 = 2p(x-a)$

La Parábola

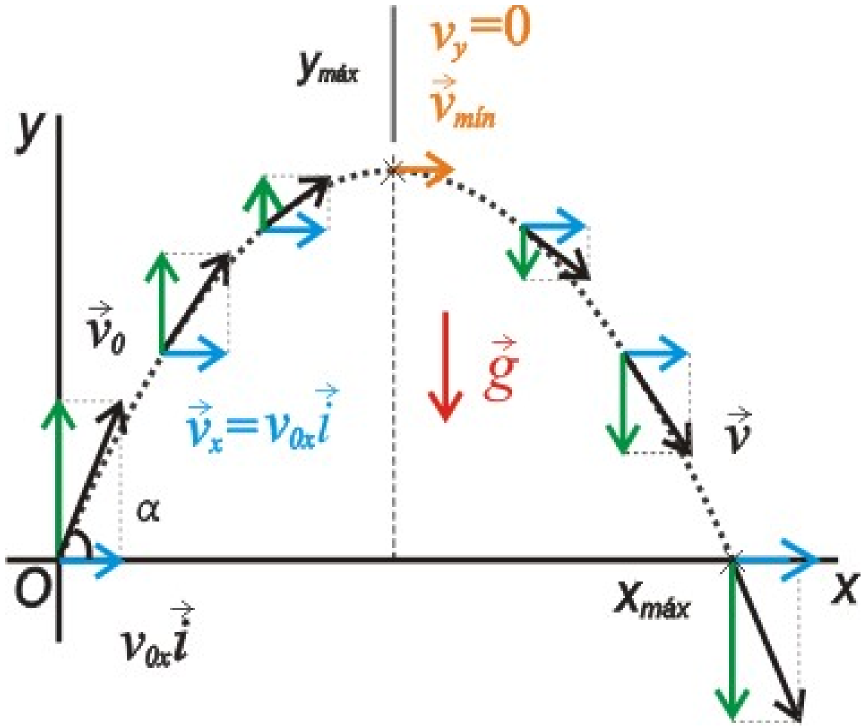

P(x,y)
F=(0,p/2)
d:y=-p/2
$x^2 = 2py$


d:y=p/2
F=(0,-p/2)
P(x,y)
$x^2 = -2py$


$(x-a)^2 = 2p(y-b)$
P(x,y)
F(a,b+p/2)
V(a,b)
d:y=b-p/2



y
g
g
$\vec{v}_0$
θ
g
x



$v_y=0$
$y_{máx}$
$\vec{v}_{mín}$
y
$\vec{v}_0$
$\vec{g}$
$\vec{v}_x = v_{0x}\vec{i}$
$\vec{v}$
α
O
x
$x_{máx}$
$v_{0x}\vec{i}$

Expresión general de las cónicas

Empezaremos con un ejemplo. Considera la ecuación de segundo grado con dos incógnitas x e y siguiente:

$$2\,x^2 + 3\,y^2 - 4\,x - 12\,y + 8 = 0$$

Para conseguir la ecuación reducida de la cónica se agrupan cuadrados de la siguiente forma

- $2\,x^2 - 4\,x = 2(x^2 - 2x) = 2(x^2 - 2x + 1 - 1) = 2[(x-1)^2 - 1]$
- $3\,y^2 - 12\,y = 3(y^2 - 4y) = 3(y^2 - 4y + 4 - 4) = 3[(y-2)^2 - 4]$

sustituyendo en la expresión dada se obtiene

$$2[(x-1)^2 - 1] + 3[(y-2)^2 - 4] + 8 = 0$$

operando

$$2(x-1)^2 + 3(y-2)^2 = 6$$

dividiendo por 6, se obtiene la ecuación reducida de la elipse

$$\frac{(x-1)^2}{3} + \frac{(y-2)^2}{2} = 1$$

Definición 6.1 *La ecuación general de segundo grado en x e y*

$$\boxed{A\,x^2 + B\,y^2 + C\,x + D\,y + E = 0}$$

corresponde a una de las cónicas: circunferencia, elipse, hipérbola o parábola. Para llegar a su ecuación reducida se agrupan cuadrados.