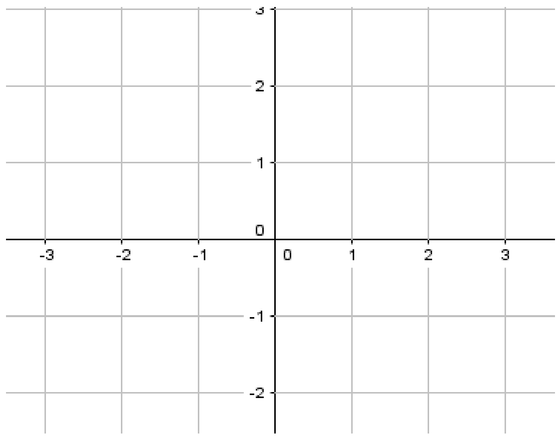
1.- La parte real de un número complejo es -4 y su parte imaginaria es 4. Se te pide:



a) Exprésalo en forma binómica , polar y represéntalo gráficamente.

b) Si el complejo inicial es una de las soluciones de una ecuación de 2º grado con coeficientes reales, determina dicha ecuación.

2.- Dados los vectores: $\vec{u}(2,3)$ y el vector $\vec{v}(6,x)$ Se te pide:

a) Determina el valor de "x" para que ambos vectores sean:

a₁) Perpendiculares:

a₂) Paralelos:

b) Si el vector $\vec{p}(2,-1)$, expresa el vector $\vec{w}(2,-9)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{p}$. ¿Qué representan los valores hallados?

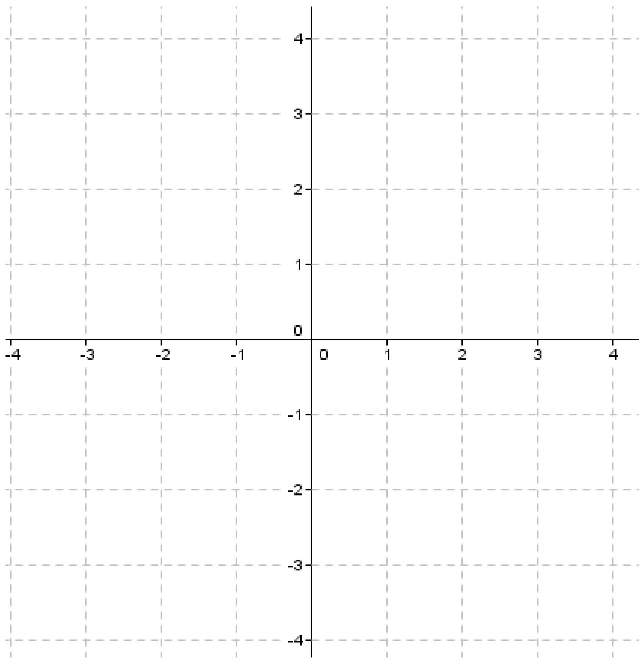
c) Determina el valor de la proyección del vector $\vec{u}$ sobre el vector $\vec{p}$

3.- El número complejo $z_1 = \dfrac{2}{-\sqrt{3}-i}$, es una de las raíces de una ecuación de 2º grado con coeficientes reales. Se te pide:

a) Expresa z_1 en forma binómica y polar. Represéntalo gráficamente. 10p

b) Si dicha solución es: $z_1 = -\sqrt{3}+i$, obtén la ecuación de 2º grado a la que le corresponde dicha solución. Si dicha ecuación fuera $z^2 + 2\sqrt{3}\cdot x + 4 = 0$ comprueba que dicha ecuación tiene esas soluciones.

4.- Dados los vectores $\vec{u}\ (3,-2)$ y $\vec{v}\ (1,2)$.Se te pide:



a) Determina el ángulo que forman dichos vectores.

b)Expresa el vector $\vec{w}(-2,\ 4)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Indica el significado de los valores hallados.

c) Determina las componentes de un vector unitario (Módulo unidad) que tenga la misma dirección, sentido opuesto al vector $\vec{v}$.

5.- Dado el complejo $z = -3 - 3i$. Se te pide:

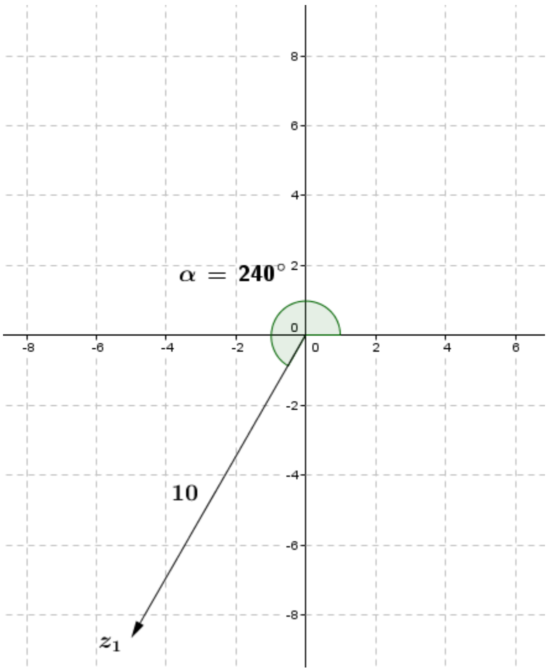
a) Expresa dicho complejo en forma polar y represéntalo en el plano complejo adjunto. p

b) Calcula el complejo opuesto ($-z$) y el conjugado ($\overline{z}$) y determina el valor de $\dfrac{\overline{z}}{(-z)^2}$, exprésalo en forma polar y binómica,

c) Si el complejo propuesto (z) es una de las soluciones correspondientes a una ecuación de 2º grado de coeficientes reales determina dicha ecuación.

d) Si la ecuación fuera $z^2 + 6z + 18 = 0$. Determina sus soluciones en el campo de los números complejos.

6.- Dado el complejo z_1 de la figura adjunta. Se te pide:



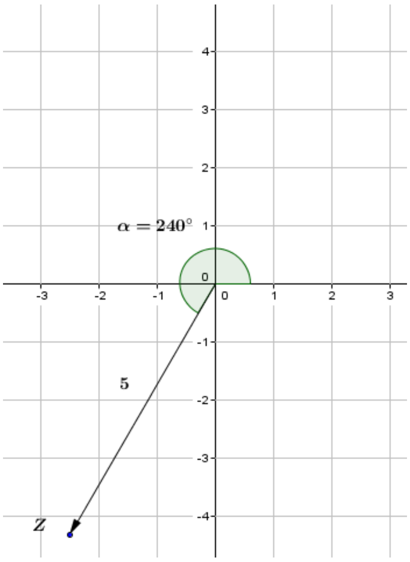
a) Expresa dicho complejo en forma polar y binómica

b) Calcula el complejo opuesto ($-z$) y el conjugado ($\overline{z}$) en forma polar y represéntalo en el plano complejo adjunto. Finalmente determina el valor de $\dfrac{-z}{(\overline{z})^2}$, expresa el complejo resultante en forma polar y binómica,

c) Si el complejo propuesto (z_1) es una de las soluciones correspondientes a una ecuación de 2º grado de coeficientes reales determina dicha ecuación.

d) Si la ecuación fuera $z^2 + 10z + 100 = 0$. Determina sus soluciones en el campo de los números complejos.

7.-El complejo Z viene representado en el plano adjunto. Se te pide:



a) Expresa dicho complejo en forma polar y binómica

b) Determina las expresiones binómica y polar de los complejos opuesto e inverso del complejo Z. Represéntalos gráficamente.

c) Si el complejo Z, resulta ser una de las soluciones de una ecuación de 2º grado con coeficientes reales, determina las expresiones binómicos y polares de la 2ª solución y represéntala gráficamente. Obtén dicha ecuación de 2º grado.

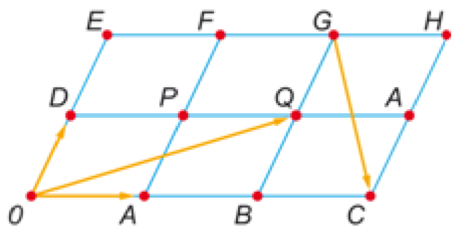
d) Si dicha ecuación fuera $z^2 + 5z + 25 = 0$. Determina sus soluciones en el campo de los números complejos.

8.-

a) En la figura adjunta, considera los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OD}$. Se te pide:

a$_1$) Ambos vectores forman una base en el plano. Razona la afirmación que se ha hecho.

a$_2$) Indica las coordenadas que tendrán los vectores $\overrightarrow{OQ}$ y $\overrightarrow{GC}$ en la base $B\{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD}\}$



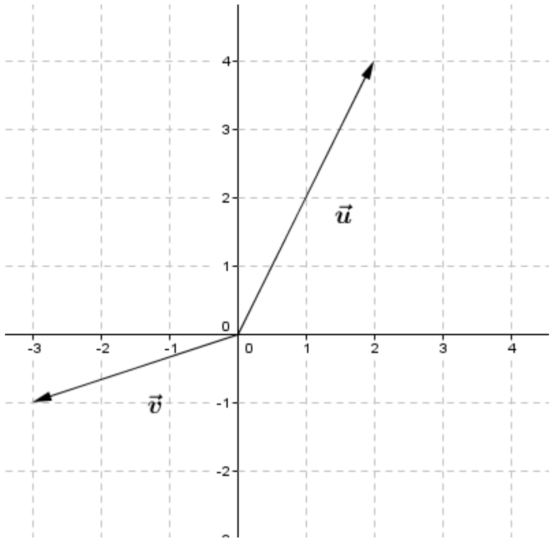
b) Dados los vectores $\vec{a}(2, 1)$ y $\vec{b}(1, -4)$., se te pide:

b$_1$) Expresa el vector $\vec{p}(-4, -11)$ como combinación lineal de ellos.

b$_2$) ¿Qué representan los valores hallados en el apartado anterior?

9.-

a) Define el producto escalar de 2 vectores, traduce a expresión matemática dicha definición y posteriormente relaciona el producto escalar con las proyecciones de cada uno de los vectores sobre el otro.



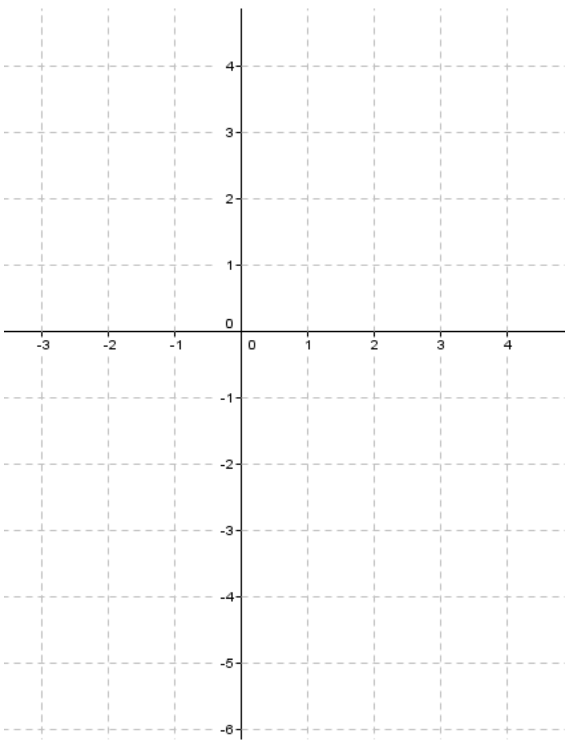
b) Dados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de la figura adjunta. Se te pide

b$_1$) Determina las coordenadas de dichos vectores en la base ortonormal correspondiente y calcula el valor de su producto escalar.

b$_2$) Determina el ángulo que forman ambos vectores.$_p$

b$_3$) Obtén, gráficamente y numéricamente, la proyección del vector $\vec{u}$ sobre el vector $\vec{v}_p$

10.-Una recta la determinan los puntos $P(-2, 3)$ y $Q(1, -1)$. Se te pide:



a) Representa dichos puntos en el plano cartesiano, traza la recta. Determina un vector director de dicha recta y calcula su pendiente.

b) Expresa la recta de todas las formas que conozcas y dibújala en el plano cartesiano adjunto.

c) Halla el punto simétrico del punto P respecto al punto Q, deberás hacerlo algebraicamente y comprobarlo gráficamente.

d) Considera el segmento $\overline{PQ}$. Localiza las coordenadas del punto más cercano al punto Q que resulta de dividir dicho segmento $\overline{PQ}$ en seis partes iguales.

e) Si $A(-3, k)$. Calcula el valor de k para que el punto pertenezca a la recta.

1.- La parte real de un número complejo es -2 y su parte imaginaria es $-2\sqrt{3}$. Se te pide:

a) Exprésalo en forma binómica , polar y represéntalo gráficamente.

b) Si el complejo inicial es una de las soluciones de una ecuación de 2º grado con coeficientes reales, determina dicha ecuación

2.- Dados los vectores: $\vec{u}(-3, -2)$ y el vector $\vec{v}(1, 4)$ Se te pide:

a) Ángulo que forman dichos vectores.

b) Expresa el vector $\vec{w}(4, -4)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. ¿Qué representan los valores hallados?

c) Determina el valor de la proyección del vector $\vec{v}$ sobre el vector $\vec{u}$

3.- El número complejo $z_1 = \dfrac{7}{2+\sqrt{3}i}$, es una de las raíces de una ecuación de 2º grado con coeficientes reales. Se te pide:

a) Expresa z_1 en forma binómica y polar. Represéntalo gráficamente.

b) Obtén la ecuación de 2º grado a la que le corresponde dicha solución.

4.- Dados los vectores $\vec{u}\ (2, a)$ y $\vec{v}\ (-6, 4)$.Se te pide:

a) Determina el valor de "a" para que ambos vectores sean perpendiculares. (Razona la respuesta)

b) Si el vector $\vec{u}\ (2, 3)$, expresa el vector $\vec{w}(10,\ 2)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Indica el significado de los valores hallados.

c) Determina los dos vectores que sean, a la vez, unitarios y perpendiculares al vector $\vec{v}$.

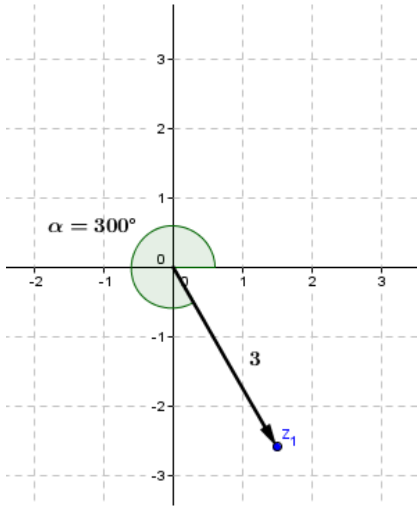
5.- Dada la ecuación: $z^2 + 5\sqrt{3}z + 25 = 0$. Se te pide:

a) Resuelve dicha ecuación en el campo de los números complejos. Expresa las soluciones en forma binómica, polar y gráfica (Ayúdate el plano adjunto)

b) Si una de las soluciones de la ecuación fuera: $z_1 = \dfrac{-5}{2} + \dfrac{5\sqrt{3}}{2}i$. ¿Cuál debería ser la otra solución?. Razónalo convenientemente. Determina el complejo inverso al propuesto y exprésalo en forma binómica y polar

c) Dando por cierta la afirmación anterior obtén la ecuación de 2º grado de las que son solución.

6.- En el plano complejo adjunto puedes ver el complejo Z_1



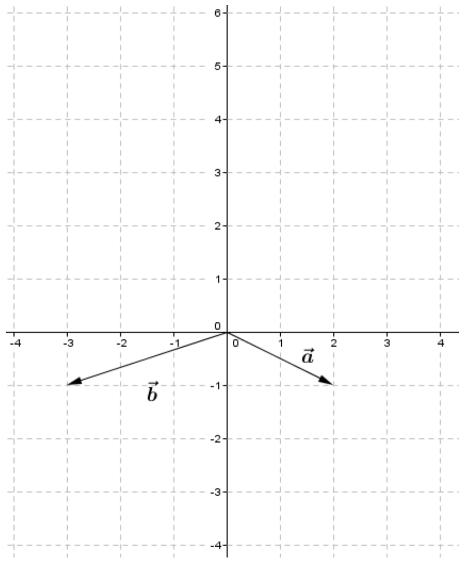
a) Expresa dicho complejo en forma polar y binómica.
b) Calcula el complejo opuesto y conjugado a Z_1 exprésalos en forma polar, binómica y de forma gráfica
c) Si el complejo propuesto es una de las soluciones correspondientes a una ecuación de 2º grado de coeficientes reales determina dicha ecuació
d) Si la ecuación fuera $z^2 - 3z + 9 = 0.$ Determina sus soluciones en el campo de los números complejos.

7- Dado el complejo $z_1 = -2\sqrt{3} - 2i$. Se te pide:

a) Expresa dicho complejo en forma polar y represéntalo gráficamente en el plano complejo adjunto.
b) Determina las expresiones binómica y polar de los complejos opuesto e inverso a z_1. Represéntalos gráficamente.
c) Si el complejo z_1, resulta ser una de las soluciones de una ecuación de 2º grado con coeficientes reales, determina las expresiones binómicos y polares de la 2ª solución y represéntala gráficamente. Obtén dicha ecuación de 2º grado.
d) Si dicha ecuación fuera $z^2 + 4\sqrt{3} \cdot z + 16 = 0$. Determina sus soluciones en el campo de los números complejos.

8.- Dados los vectores $\vec{u}(-1,-2)$ y $\vec{v}(3,-1)$. Se te pide
a) Dibújalos en el plano cartesiano:
a_1) ¿Qué debe cumplir 2 vectores en el plano para constituir una base?. Comprueba de forma analítica (usando sus componentes) que ambos vectores forman una base en el plano.*p*
a_2) ¿Será base ortogonal?.Razónalo convenientemente.
a_3) Obtén los vectores unitarios de ambos vectores
b) Determina gráficamente los vectores:
b_1) $\vec{S} = \vec{u} + \vec{v}$
b_2) $\vec{R} = -\vec{u} + \vec{v}$
c) Dado el vector $\vec{w}(-6, -5)$, exprésalo como combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, utiliza para ello el método algebraico y compruébalo gráficamente. ¿Qué significado tienen los valores obtenidos ?.

9.-



a) Define el producto escalar de 2 vectores, relaciona el producto escalar con las proyecciones de cada uno de los vectores sobre el otro.
b) Dados los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ Determina las componentes de ambos vectores y se te pide:
b_1) Calcula el valor de su producto escalar.
b_2) Determina el ángulo que forman ambos vectores.
b_3) Determina, gráficamente y numéricamente, la proyección del vector $\vec{a}$ sobre el vector $\vec{b}$.

10.- La ecuación de una recta viene dada por la expresión: $r \equiv \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$. Se te pide:

a) ¿cómo se llama la forma en que te han dado la ecuación de la recta?. Determina un vector director, su pendiente y el punto “P” en que dicha recta corta al eje de ordenadas.

b) Expresa la recta de todas las formas que conozcas y dibújala en el plano cartesiano adjunto.

c) Halla el punto simétrico del punto Q respecto al punto P que es el punto en el que la recta corta al eje de abscisas, deberás hacerlo algebraicamente y comprobarlo gráficamente.

d) Considera el segmento $\overline{PQ}$. Localiza las coordenadas del punto más cercano al punto P que resulta de dividir dicho segmento $\overline{PQ}$ en siete partes iguales.

e) Si $D(4, -k)$. Calcula el valor de k para que el punto pertenezca a la recta.

11.- Dado el complejo $z_1 = 4_{210}$. Se te pide:

a) Expresa dicho complejo en forma binómica y represéntalo gráficamente en el plano complejo adjunto.

b) Determina las expresiones binómica y polar de los complejos opuesto e inverso a z_1. Represéntalos gráficamente.

c) Si el complejo z_1, resulta ser una de las soluciones de una ecuación de 2º grado con coeficientes reales, determina las expresiones binómicos y polares de la 2ª solución y represéntala gráficamente. Obtén dicha ecuación de 2º grado.

d) Si dicha ecuación fuera $z^2 + 4\sqrt{3} \cdot z + 16 = 0$. Determina sus soluciones en el campo de los números complejos.

12- Dados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de la figura adjunta. Se te pide

a) Determina sus componentes y:

a_1) ¿Qué debe cumplir 2 vectores en el plano para constituir una base?. Comprueba de forma analítica (usando sus componentes) que ambos vectores forman una base en el plano.

a_2) ¿Será base ortogonal?.Razónalo convenientemente.

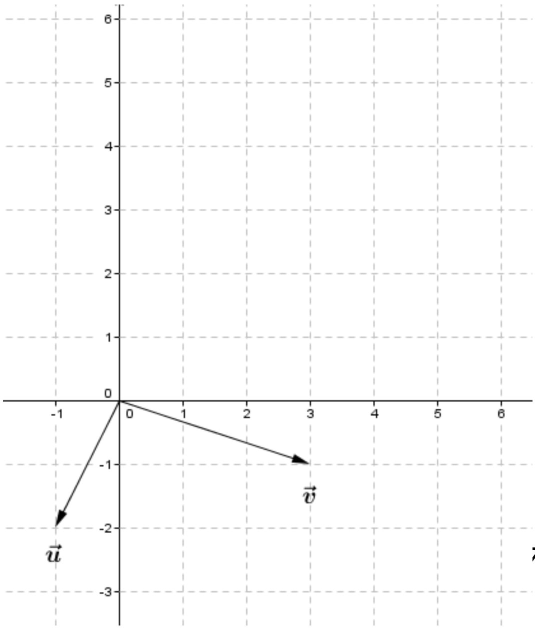
a_3) Obtén los vectores unitarios de ambos vectores

b) Determina gráficamente los vectores:

b_1) $\vec{S} = \vec{u} + \vec{v}$

b_2) $\vec{R} = -\vec{u} + \vec{v}$

c) Dado el vector $\vec{w}(6, 5)$, exprésalo como combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, utiliza para ello el método algebraico y compruébalo gráficamente. ¿Qué significado tienen los valores obtenidos ?.



13.-

a) Define el producto escalar de 2 vectores, relaciona el producto escalar con las proyecciones de cada uno de los vectores sobre el otro.

b) Dados los vectores $\vec{a}(-3, -1)$, $\vec{b}(2, -1)$ referidos a una base ortonormal, se te pide:

b_1) Calculo el valor de su producto escalar.

b_2) Determina el ángulo que forman ambos vectores.

b_3) Determina, gráficamente y numéricamente, la proyección del vector $\vec{b}$ sobre el vector $\vec{a}$.

14.- La ecuación de una recta viene dada por la expresión: $r \equiv 3x + 2y - 6 = 0$. Se te pide:

a) ¿cómo se llama la forma en que te han dado la ecuación de la recta?. Determina un vector director, su pendiente y el punto "A" en que dicha recta corta al eje de ordenadas.
b) Expresa la recta de todas las formas que conozcas y dibújala en el plano cartesiano adjunto.
c) Halla el punto simétrico del punto A respecto al punto B que es el punto en el que la recta corta al eje de abscisas, deberás hacerlo algebraicamente y comprobarlo gráficamente.
d) Considera el segmento $\overline{AB}$. Localiza las coordenadas del punto más cercano al punto B que resulta de dividir dicho segmento $\overline{AB}$ en cinco partes iguales.
e) Si $D(k, -3)$. Calcula el valor de k para que el punto pertenezca a la recta.

Ejercicios examen 13-14	Complejos-Vectores-Recta I

1.- Dado el complejo $z = 4_{120^\circ}$. Se te pide:

a) Exprésalo en forma binómica y represéntalo gráficamente.

b) Si el complejo inicial es una de las soluciones de una ecuación de 2º grado con coeficientes reales, determina dicha ecuación.

2.- Dados los vectores: $\vec{u}(1, 6)$ y el vector $\vec{v}(5, 4)$ Se te pide:

a) Ángulo que forman dichos vectores.

b) Coordenadas del vector $\vec{w}(-4, 2)$ respecto a la base $B\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$

c) Determina un vector perpendicular $\vec{u}$ y unitario

3.- El número complejo $z_1 = -3 \cdot i^{12} + 4 \cdot i^5$, es una de las raíces de una ecuación de 2º grado con coeficientes reales. Se te pide:

a) Expresa z_1 en forma binómica y polar. Represéntalo gráficamente.
b) Obtén la ecuación de 2º grado a la que le corresponde dicha solución.

4.- Dados los vectores $\vec{u}\left(-1, \sqrt{3}\right)$ y $\vec{v}\left(2, 0\right)$.Se te pide:

a) Determina el ángulo que forman ambos vectores.
b) Expresa el vector $\vec{w}(2,\ 3)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Indica el significado de los valores hallados.
c) Determina un vector que sea, a la vez, unitario y perpendicular al vector $\vec{u}$.

5.- En una ecuación de 2º grado con coeficientes reales, una de las soluciones en el campo complejo es: $z_1 = -3 - 4i$ .Se te pide:

a) Expresar dicha solución en forma polar y represéntala gráficamente.
b) Escribe la otra solución de la ecuación y obtén la ecuación de 2º grado que tiene dichas soluciones.
c) Obtén los complejos opuestos e inversos de z_1 en forma binómica y polar.

6.-Dados los vectores: $\vec{u}=(1,2)$ y $\vec{v}=(2,-2)$ referidos a una base ortonormal. Se te pide:

a) Determina, gráficamente y numéricamente los vectores: $\begin{cases}\vec{a}=2\vec{u}+\vec{v}\\ \vec{b}=\vec{u}-2\cdot\vec{v}\end{cases}$

b) Razona si los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ forman base. En caso afirmativo, ¿Será ortogonal?, ¿Y ortonormal?.

c) Determina el ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

d) Obtener, de forma analítica (no gráfica) las componentes del vector $\vec{w}=(-1,4)$ en la base que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

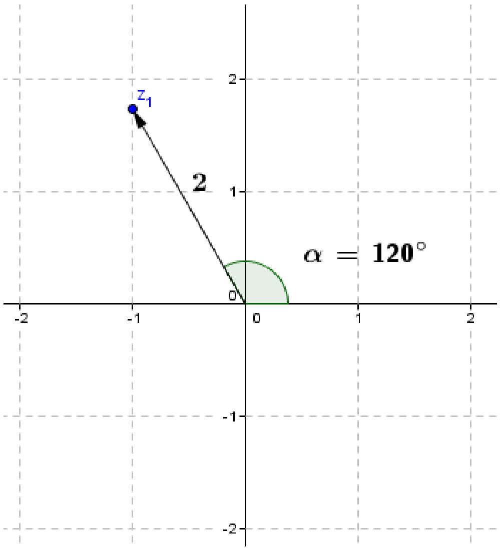
7.- Dada la ecuación: $z^2+4\cdot z+16=0$, se te pide:

a) Resuelve dicha ecuación en el campo de los números complejos. . ¿Cómo son las soluciones obtenidas?. ¿Era previsible, porqué?

b) Expresa dichas soluciones en forma polar y ayudándote del plano adjunto localiza en dicho plano dichas soluciones.

c) Obtén el complejo inverso de $z=-2+2\sqrt{3}\cdot i$

8.- En la figura adjunta se te ha representado el complejo. Se te pide:

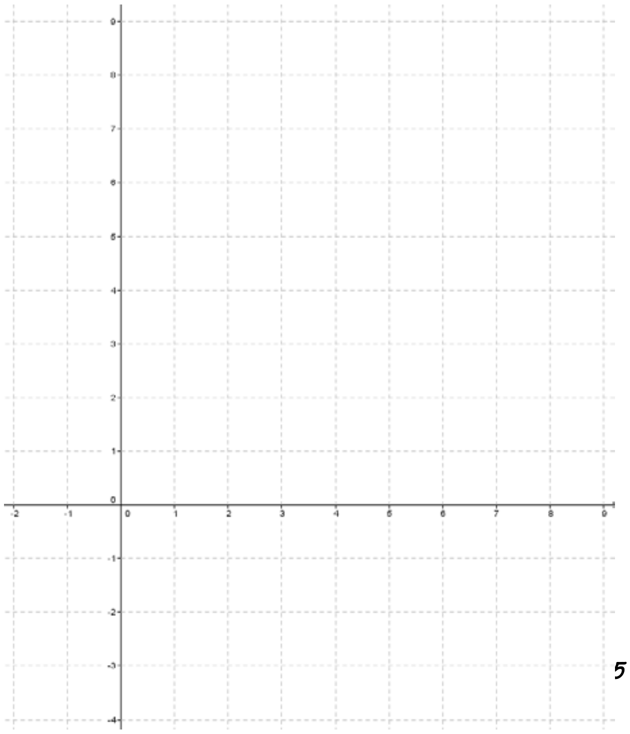


a) Expresa dicho complejo en forma polar y binómica. *0,5p*

b) Determina las expresiones binómica y polar de los complejos opuesto e inverso a z_1. Represéntalos gráficamente. *0,5p*

c) Si el complejo z_1, resulta ser una de las soluciones de una ecuación de 2º grado con coeficientes reales, determina las expresiones binómicos y polares de la 2ª solución y represéntala gráficamente. Obtén dicha ecuación de 2º grd) Si dicha ecuación fuera $z^2+2\cdot z+4=0$. Determina sus soluciones en el campo de los números complejos. *0,5p*

9.- Dados los vectores $\vec{u}(3,-1)$, $\vec{v}(-1,-3)$. Se te pide:



a) Represéntalos, en el plano cartesiano adjunto y:

a_1) Demuestra que ambos vectores forman una base. Deberás razonarlo de forma gráfica y analítica. *0,5p*

a_2) Demuestra que son perpendiculares. La base formada por ambos vectores ¿Será base ortonormal? Razónalo convenientemente. *0,5p*

a_3) Determina 2 vectores opuestos a los anteriores que formen una base ortonormal. *0,5p*

b) Determina gráficamente los vectores: *0,5p*

b_1) $\vec{S}=\vec{u}+\vec{v}$

b_2) $\vec{R}=\vec{u}-\vec{v}$

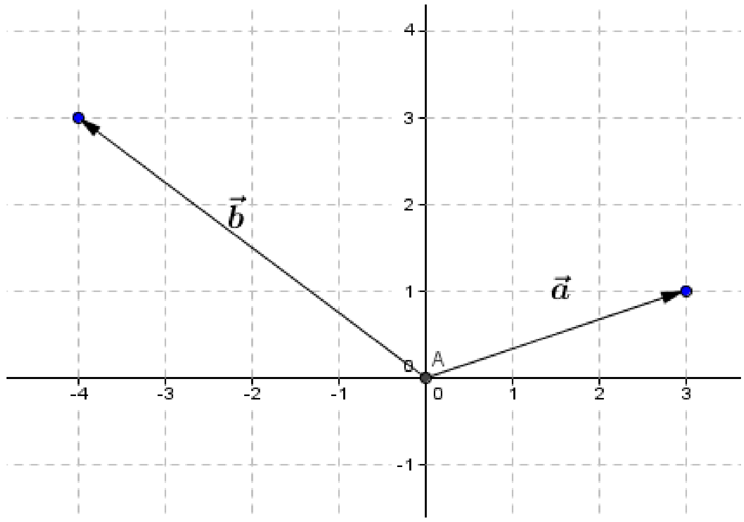
c) Dado el vector $\vec{w}(9,7)$, exprésalo como combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. ¿Qué significado tienen los valores obtenidos ?.

10.- Dados los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ de la figura adjunta. Se te pide:

a) Define el producto escalar de 2 vectores, relaciónalo con las proyección de uno de los vectores sobre el otro y calcúlalo (deberás determinar su componentes en la figura) *0'75p*

b) Determina el ángulo que forman ambos vectores. *0,75p*

c) Determina, gráficamente y numéricamente, la proyección del vector $\vec{a}$ sobre el vector $\vec{b}$. *0,75p*



1.- Una de las soluciones de una ecuación de 2º grado de coeficientes reales es el número complejo: $z_1 = 3_{150}$ .Se te pide:

a) Determina la otra solución y exprésalas ambas en forma binómica (valor exacto), polar y represéntalas gráficamente

b) Determina la ecuación que tiene dichas soluciones.

2.- Sea $z_1 = -2 + 2\sqrt{3}\ i$ una de las raíces de una ecuación de 2º grado con coeficientes reales. Se te pide:

a) Determina el valor de la otra solución. Expresa ambas soluciones en forma polar y binómica y represéntalas gráficamente en el plano complejo.

b) Obtén dicha ecuación de 2º grado:

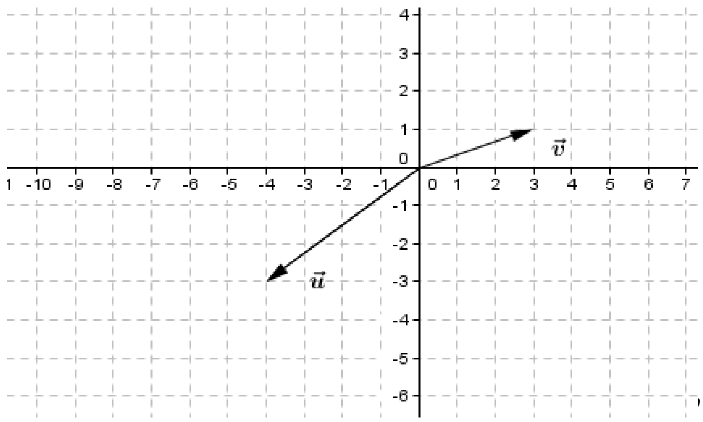
c) Resuelve la ecuación: $z^2 + 4 \cdot z + 16 = 0$

3.- Dados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ que se te suministran en la figura adjunta. Se te pide:

a) Determina las componentes de ambos. Demuestra analíticamente que ambos vectores forman una base, razonándolo convenientemente.

b) Determina el ángulo que forman ambos vectores.

c) Determina las coordenadas del vector $\vec{w}(-10, -5)$ en la base $B\{\vec{u}, \vec{v}\}$



d) Determina un vector que sea, a la vez, unitario y perpendicular al vector $\vec{u}$

4.- Dado el complejo: $z = -\sqrt{5} - 2 \cdot i$. Se te pide:

a) Determina los complejos opuesto y conjugado correspondientes a dicho complejo. Exprésalos, los tres complejos, en forma binómica y polar y represéntalos gráficamente.

b) Si el complejo suministrado resulta ser una de las soluciones de una ecuación de 2º grado de coeficientes reales. Determina dicha ecuación

c) Si la ecuación fuera: $z^2+2\sqrt{5}z+9=0$. Determina sus soluciones en el campo de los números complejos.

5.- Dados los vectores $\vec{a}=(3,2)$ y $\vec{b}=(-1,5)$. Si el punto $A(-1,-1)$ es el origen de ambos vectores. Se te pide.

a) Dibuja dichos. ¿Formaran ambos vectores una base?. ¿Será dicha base ortogonal?. Razónalo convenientemente

b) Determina, gráficamente el vector $\vec{S}=\vec{a}+\vec{b}$. Compruébalo de forma analítica

c) Determina el valor de la proyección del vector $\vec{b}$ sobre el vector $\vec{a}$. Señala dicha proyección en el dibujo.

d) Expresa el vector $\vec{p}(7,-1)$ como combinación lineal de de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$. ¿Qué significado tienen los valores hallados.

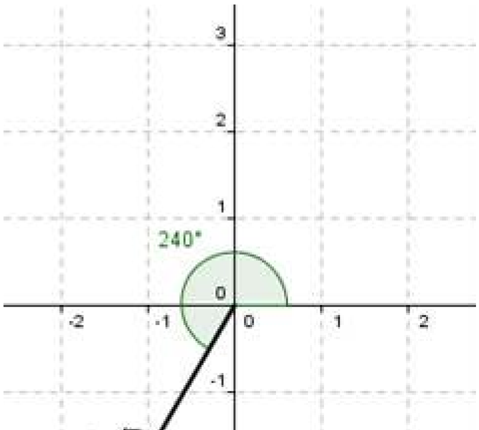
6.- Dada la ecuación: $z^2+2\sqrt{2}\cdot z+9=0$, se te pide:

a) Si la resolvemos en el campo complejo, ¿Cuántas soluciones tendrá?. ¿Cómo serán dichas soluciones?, ¿Porqué?. Si las representamos gráficamente ¿Qué posiciones ocuparán una respecto de la otra?.

b) Resuelve dicha ecuación en el campo de los números complejos

c) Expresa dichas soluciones en forma polar y ayudándote del plano adjunto localiza en dicho plano dichas soluciones..

d) Si una de las soluciones de la ecuación propuesta fuera: $z_1=-\sqrt{2}-\sqrt{7}\cdot i$, determina la expresión correspondiente a dicha ecuación..



8.- En la figura adjunta se te ha representado el complejo z_1. Se te pide:

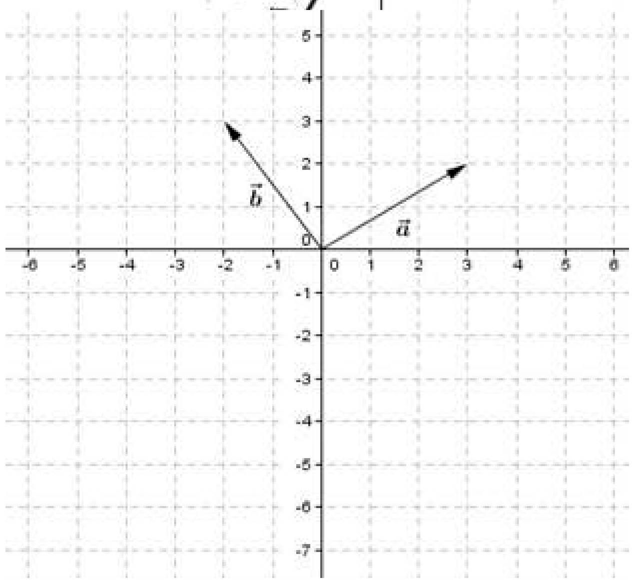
a) Expresa dicho complejo en forma polar y binómica.

b) Determina las expresiones binómica y polar del complejo opuesto a z_1. Represéntalo gráficamente.

c) Si el complejo z_1, resulta ser una de las soluciones de una ecuación de 2º grado con coeficientes reales, determina las expresiones binómicos y polares de la 2ª solución y represéntala gráficamente.

d) Obtén dicha ecuación de 2º grado.

e) Si dicha ecuación fuera $z^2+2\sqrt{3}\cdot z+12=0$. Determina sus soluciones en el campo de los números complejos.



9.- En la figura adjunta hay representados los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$. Se te pide:

a) Determina las componentes de dichos vectores y:

a$_1$) Demuestra que ambos vectores forman una base. Deberás razonarlo de dos formas distintas.

a$_2$) Comprueba que son perpendiculares. ¿Será la base ortonormal? Deberás razonarlo convenientemente.*p*

a$_3$) Determina 2 vectores con direcciones de los propuestos que formen una base ortonormal.

b) Determina gráficamente los vectores:

b$_1$) $\vec{S} = \vec{a} + \vec{b}$ b$_2$) $\vec{R} = \vec{a} - \vec{b}$

c) Dado el vector $\vec{c}(-4,-7)$, exprésalo como combinación lineal de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$. Con la información obtenida al resolver el apartado anterior ¿Qué podrías decir del vector $\vec{c}$?. *1p*

10.- Dados los vectores $\vec{u}(-3,-1)$ y $\vec{q}(4,-2)$, referidos a una base ortonormal. Se te pide:

a) Define el producto escalar de 2 vectores, calcúlalo e indica la interpretación geométrica que le podemos dar al valor obtenido.

b) Determina el ángulo que forman ambos vectores.

c) Dibújalos en el plano cartesiano que se te adjunta y determina, gráficamente y numéricamente, la proyección del vector $\vec{u}$ sobre el vector $\vec{v}$.

11.- Dados los puntos $A(1,3)$ y $B(-3,-1)$, se te pide:

a) Localiza las coordenadas del punto más cercano al punto A que resulta al dividir el segmento $\overline{AB}$ en tres partes iguales.

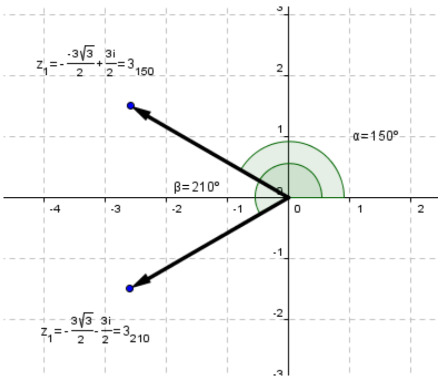
b) Halla el punto simétrico del punto B respecto al A.

c) Dichos puntos determinan una recta, obtén la ecuación de dicha recta y exprésala de todas las formas que conozcas.

d) Si $C(k,-2)$. Determina el valor de k para que dicho punto pertenezca a la recta.

Ejercicios examen 11-12	Complejos-Vectores-Recta I

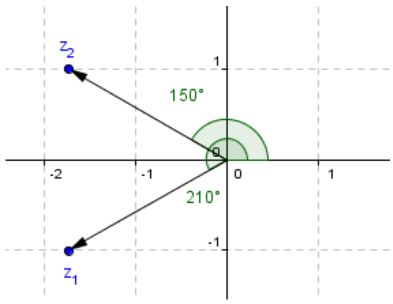
1.- Dada la ecuación: $z^2 + 3\sqrt{3} \cdot z + 9 = 0$. Resuélvela en el campo de los números complejos. Deberás dar soluciones en forma binómica, polar y en forma gráfica.



$$z_1 = \frac{-3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i \qquad z_2 = \frac{-3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$$

2.- Sea $z_1 = 2_{210}$ una de las raíces de una ecuación de 2° grado con coeficientes reales. Se te pide:

a) Determina el valor de la otra solución. Expresa ambas soluciones en forma polar y binómica y represéntalas gráficamente en el plano complejo.. $z_2 = -\sqrt{3} + i$



b) Obtén dicha ecuación de 2° grado $z^2 + 2\sqrt{3} \cdot z + 4 = 0$

c) Resuelve la ecuación: $z^2 + 2\sqrt{3} \cdot z + 4 = 0$

$$z_1 = -\sqrt{3} + i \qquad z_2 = -\sqrt{3} - i$$

3.- Dados los vectores $\vec{u}\,(-3,1)$ y $\vec{v}\,(4,-3)$, referidos a una base ortonormal. Se te pide:

a) ¿Forman dichos vectores una base?. Razónalo convenientemente.. $\frac{-3}{4} \neq \frac{1}{-3}$

b) Determina el ángulo que forman ambos vectores. $\alpha = 161{,}57^{o}$

c) Determina las coordenadas del vector $\vec{w}(-2,\ 4)$ en la base $B\{\vec{u}, \vec{v}\}$ $a = -2 \quad b = -2$

d) Determina un vector que sea, a la vez, unitario y perpendicular al vector $\vec{v}$ $\vec{p} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

4.- Los puntos $A(0,2)$, $B(1,3)$ y $C(4,2)$ son tres de los vértices del paralelogramo ABCD. Se te pide:

a) Determina las coordenadas del vértice D. $D(x,y)\} \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$

b) Determina la ecuación de la recta que contiene al lado AB del paralelogramo. $y = x + 2$

c) Determina la ecuación de la recta que contiene a la altura trazada desde el punto C sobre la recta que determinan los puntos A y B. $y = -x + 6$

d) Calcula el área del paralelogramo. $A = 4\ u.a.$

5.- Dada el número complejo $z_1 = 3_{60^{o}}$. Se te pide:

a) Expresa dicho complejo en forma binómica, determina los complejos conjugados, opuesto e inverso a dicho complejo y exprésalos en forma binómica y polar. $z_1 = \frac{3}{2} + \frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}i \qquad \overline{z_1} = 3_{300}$

$$-z_1 = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i \qquad \frac{1}{z_1} = \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{3}}{6}i$$

b) Si el complejo z_1 resulta ser una de las soluciones de una ecuación de 2º grado con coeficientes reales, ¿Cuál será la otra solución de dicha ecuación?. Determina, también, dicha ecuación de 2º grado. $z_2 = \overline{z_1} = 3_{300} = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i \qquad z^2 - 3z + 9 = 0$

6.- Con los vectores $\vec{a}(1,2)$ y $\vec{b}(-2,k)$ obtenemos los vectores, $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}$ y $\vec{v} = \vec{a} - \vec{b}$. Determina el valor que deberá tomar el parámetro "k" para que:

a) Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean perpendiculares. $k = \pm 1$

b) Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean paralelos. $k = \frac{-8}{5}$

c) $|\vec{v}| = 5$ $\qquad k_1 = \frac{4+8}{2} = 6 \qquad k_2 = \frac{4-8}{2} = -2$

7.- Los puntos $A(2,-3)$, $B(5,2)$ y $C(4,4)$ son vértices del paralelogramo ABCD. Se te pide:

a) Determina las coordinas del vértice D del paralelogramo. $D(1,-1)$

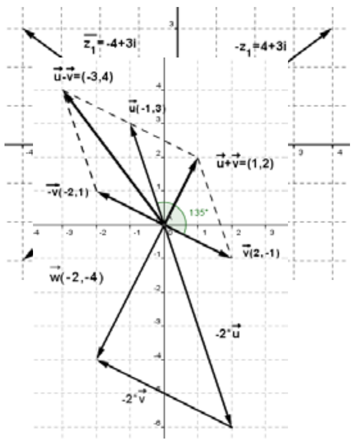
b) Calcula la ecuación de la recta que contiene al lado BC. $y = -2x + 12$

8.- En la gráfica adjunta, viene representado el complejo z_1. Se te pide:

a) Dibuja el complejo opuesto a el y expresa ambos complejos en forma polar y binómica.

$z_1 = -4 - 3i_1 = 5_{216{,}87^{o}} \qquad -z_1 = 4 + 3i = 5_{36.87^{o}}$

b) Si el complejo z_1, resulta ser una de las soluciones correspondiente a una ecuación de 2º grado de coeficientes reales. ¿Cuál será la 2ª



solución?. Qué relación existe con la 1ª?. Dibuja dicha solución y determina dicha ecuación.

$z_2 = \overline{z_1} = -4 + 3i = 5_{143,13^\circ}$ $\quad \boldsymbol{z^2 + 8x + 25 = 0}$

c) Resuelve la ecuación obtenida en el apartado anterior y comprueba que las soluciones obtenidas son las que cabría esperar. $\begin{cases} \boldsymbol{z_1 = -4 + 3i} \\ \boldsymbol{z_2 = -4 - 3i} \end{cases}$

9.- Dados los vectores $\vec{u}(-1, 3)$ y $\vec{v}(2, -1)$ referidos a una base ortonormal. Se te pide:

a) Represéntalos gráficamente. ¿Formarán base?, razónalo gráficamente y analíticamente. $\frac{-1}{3} \neq \frac{2}{-1}$

b) Calcula: $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$, gráficamente y analíticamente.

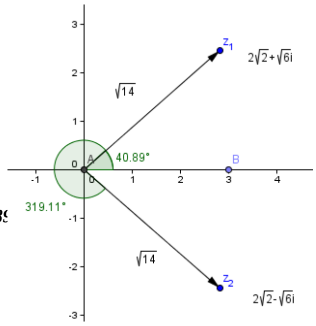
$$\boldsymbol{\vec{u} + \vec{v} = (1, 2)} \qquad \boldsymbol{\vec{u} + \vec{v} = (-3, 4)}$$

c) Determina el ángulo que forman dichos vectores.

$$\boldsymbol{\alpha = 135^o}$$

d) Expresa el vector $\vec{w}(-2, -4)$ como combinación lineal de los vectores propuestos. ¿Qué representan los valores obtenidos?. $\vec{w}(-2, -2)$

10.- Dada la ecuación: $z^2 - 4\sqrt{2} \cdot z + 14 = 0$. Se te pide:



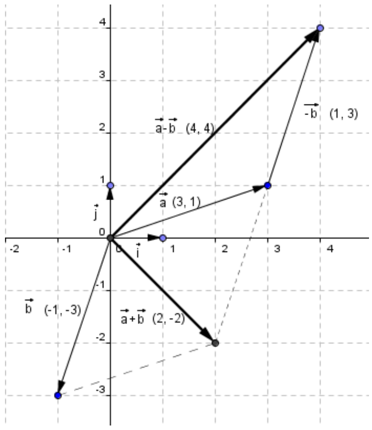
a) Resuelve dicha ecuación en el campo de los números complejos, ¿Cómo serán ambas soluciones?. ¿Porqué?. $\{\boldsymbol{z_1 = 2\sqrt{2} + \sqrt{6} \cdot i}$

b) Expresa dichas soluciones en forma polar y represéntalas gráficamente de forma aproximada. $\boldsymbol{z_1 = \sqrt{14}_{40,8}}$

c) Si dichas soluciones fueran $z_1 = 2\sqrt{2} - \sqrt{6} \cdot i$ y $z_1 = 2\sqrt{2} + \sqrt{6} \cdot i$. Determina la ecuación de 2º grado que determinan.

$$\boldsymbol{z^2 - 4\sqrt{2} \cdot z + 14 = 0}$$

11.- En la figura adjunta hay representados los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{i}$ y $\vec{j}$. Se te pide:



a) ¿Formarán los vectores $\vec{i}$ y $\vec{j}$ una base?. Razona la respuesta y si la respuesta es afirmativa ¿De qué tipo será dicha base. ¿Porqué?

Sí formarán base porque tienen distinta dirección. La base será <u>ORTONORMAL</u> porque los vectores que la forman son perpendiculares y de módulo unidad.

b) Determina las componentes de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ en la base formada por los vectores $\vec{i}$ y $\vec{j}$. ¿Formarían los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ una base?. Razónalo y compruébalo utilizando sus componentes.

$\frac{3}{-1} = \frac{1}{-3}$, **que es falso y por lo tanto tienen distinta dirección.**

c) Determina gráficamente los vectores:

$$\vec{S} = \vec{a} + \vec{b} \qquad \vec{R} = \vec{a} - \vec{b}$$

Comprueba el resultado utilizando componentes.

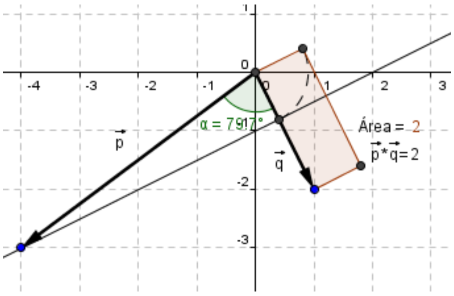
d) Determina los vectores unitarios y perpendiculares al vector $\vec{a}$.

$$\begin{cases} \vec{p}(-1, 3) \rightarrow \left(\frac{-\sqrt{10}}{10}, \frac{3\sqrt{10}}{10} \right) \\ \vec{q}(1, -3) \rightarrow \left(\frac{\sqrt{10}}{10}, \frac{-3\sqrt{10}}{10} \right) \end{cases}$$

e) Sea el vector $\vec{w}(-7,-5)$. Expresa dicho vector como combinación lineal de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$. ¿Qué son los valores hallados en el proceso anterior?.

Los valores hallados son las componentes del vector $\vec{w}$ en la base formada por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$. Es decir $\vec{w}=(-2,1)$ en la base $B\left(\vec{a},\vec{b}\right)$

12.- Dados los vectores $\vec{p}(-4,-3)$ y $\vec{q}(1,-2)$, referidos a una base ortonormal. Se te pide:



a) El ángulo que forman. $\alpha = 79{,}7^{o}$

b) La proyección del vector $\vec{p}$ sobre el vector $\vec{q}$.

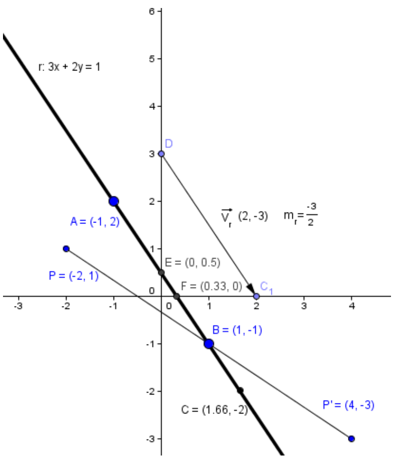
$$Proy_{\vec{q}}\,\vec{p} = \frac{2\cdot\sqrt{5}}{5}$$

c) ¿Qué interpretación gráfica tiene el valor obtenido al realizar el producto escalar de dos vectores?. **Es el área del rectángulo cuya base es uno de los vectores y la altura la proyección del otro vector sobre el.**

13.- En la imagen adjunta se muestra una recta y dos de sus puntos. Se te pide:

a) Determina, de todas formas que conozcas, las ecuaciones de dicha recta.

$$Ec.\_Vectorial: \begin{cases} \vec{V}_r = \overrightarrow{AB}(1+1,-1-2)=(2,-3) \\ A(-1,2) \end{cases} \rightarrow \overrightarrow{OX}(x,y)=(-1,2)+t\cdot(2,-3)$$



$$Ec.\_Paramétrica: \begin{cases} x=-1+2t \\ y=2-3t \end{cases}$$

$$Ec.\_Continua: \begin{cases} t=\dfrac{x+1}{2} \\ t=\dfrac{y-2}{-3} \end{cases} \rightarrow \frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-3}$$

$$Ec.\_General\ o\ Implícita: -3x-3=2y-4 \rightarrow 3x+2y-1=0$$

$$Ec.\_Explícita: y=\frac{-3}{2}x+\frac{1}{3}$$

$$Ec.- \begin{cases} Punto \rightarrow A(-1,2) \\ Pendiente \rightarrow m=\dfrac{-3}{2} \end{cases} \rightarrow y-2=\frac{-3}{2}(x+1)$$

$$Ec.Reducida: 3x+2y=1 \rightarrow \frac{x}{\frac{1}{3}}+\frac{y}{\frac{1}{2}}=1 \xrightarrow{Cortes\_Ejes} \begin{cases} E\_Abscisas: \left(\dfrac{1}{3},0\right) \\ E\_Ordenadas\left(0,\dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$$

b) Determina el valor de "k" para que el punto $C(k,-2)$ esté alineado con los puntos A y B.

$$k=\frac{5}{3}$$

c) Halla el simétrico del punto $P(-2,1)$ respecto al punto B. $\quad P'(4,-3)$

1.- Un número complejo, al que llamaremos z_1, tiene de módulo 6 y argumento 210. Se te pide:

a) Represéntalo gráficamente y expresa dicho complejo en forma polar y binómica.

Sol: $z_1 = 6_{210} = -3\cdot\sqrt{3} - 3\cdot i$

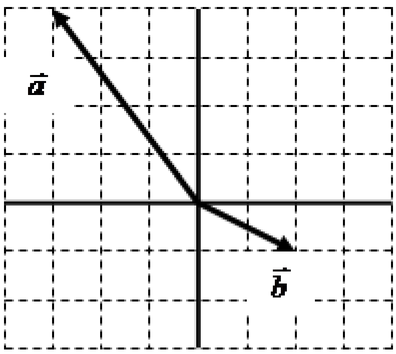
b) Si se sabe que dicho complejo es una de las soluciones de una ecuación de 2° grado con coeficientes reales. ¿Cuál será la otra solución?. Represéntala gráficamente y exprésala en forma binómica y polar. Sol: $z_2 = 6_{150} = -3\cdot\sqrt{3} + 3\cdot i$

c) Si dichas soluciones fueran $z_1 = -3 - 3\sqrt{3}i$ y $z_1 = -3 + 3\sqrt{3}i$. Determina la ecuación de 2° grado que determinan. *Sol:* $z^2 + 6\sqrt{3}z + 36 = 0$

d) Si la ecuación de 2° grado fuera $z^2 + 6z + 36 = 0$. Resuélvela en el campo de los números complejos. *Sol:* $\begin{cases} z_1 = -3\cdot\sqrt{3} + 3i \\ z_1 = -3\cdot\sqrt{3} - 3i \end{cases} i$

2.- Dadas los vectores $\vec{a}(-3,4)$ y $\vec{b}(2,-1)$, referidos a una base ortonormal. Se te pide:

a) Comprueba gráficamente y analíticamente que dichos vectores forman una base.



Analíticamente: Las componentes de los vectores NO han de ser proporcionales, es decir: $\frac{-3}{2} \neq \frac{4}{-1}$. ***Que efectivamente es cierto.***

b) Un vector unitario y perpendicular al vector $\vec{b}$.

Sol: $\vec{p}_{unitario} = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$

c) Un vector triple que el vector $\vec{a}$ y de sentido opuesto a el.

Sol: $(-6,3)$

c) Sea el vector $\vec{w}(4,-7)$. Expresa dicho vector como combinación lineal de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$. ¿Qué son los valores hallados en el proceso anterior?. Sol: $\vec{w} = -2\vec{a} - \vec{b}$

3.- Dados los vectores $\vec{p}(-3,2)$ y $\vec{q}(1,4)$, referidos a una base ortonormal. Se te pide:

a) El ángulo que forman. *Sol:* $\alpha = 70{,}35^o$

b) La proyección del vector $\vec{p}$ sobre el vector $\vec{q}$. $Proy_{\vec{q}}\, \vec{p} = \frac{5\cdot\sqrt{17}}{17}$

c) Dada la expresión: $\left(\vec{q} - \vec{p}\right)\cdot\left(\vec{p} - \vec{q}\right)$. Calcula el valor de la misma. *Sol: 20*

4.- .- Dados los puntos: $P(-3,5)$ y $Q(3,1)$. Se te pide:

Determina:

a) Si el punto $C(5,k)$, determina el valor que deberá tomar k para que el punto C esté alienado con P y con Q. Sol: $k = \frac{-2}{6} = \frac{-1}{3}$.

b) Halla el punto simétrico del punto Q respecto al punto P. $Q' = (-9,9)$

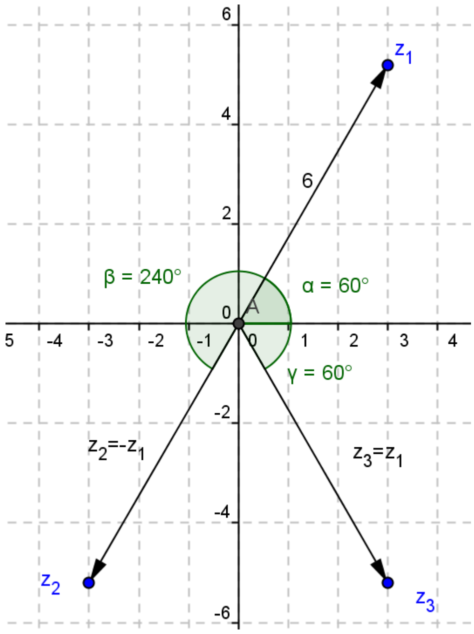
c) Determina la ecuación de la recta que determinan dichos puntos y exprésala de todas las formas que conozcas.

$$\xrightarrow{Ec.Vectorial}(x,y)=(3,1)+t\cdot(3,-2);\quad \xrightarrow{Ec.Paramétrica}\begin{cases}x=3+3t\\ y=1-2t\end{cases}\quad \xrightarrow{Continua}\frac{x-3}{3}=\frac{y-1}{-2}$$

$$\xrightarrow{Ec.General}2x+3y-9=0;\quad \xrightarrow{Ec.Explícita}y=-\frac{2}{3}x+3;\quad \xrightarrow{Punto\_Pendiente}y-1=\frac{-2}{3}(x-3);$$

$$\xrightarrow{Ec.Reducida}\frac{x}{\frac{9}{2}}+\frac{y}{3}=$$

5.- En el gráfico adjunto se representa el complejo z_1 y se puede observar su módulo y argumento. Se te pide:



a) Expresa dicha complejo, sin usar la calculadora, en forma polar y en forma binómica.

Sol: $z_1=6_{60^\circ}=3+3\cdot\sqrt{3}\,i$

b) ¿Cuál será la expresión del complejo opuesto a z_1?.Exprésala en forma polar, binómica y dibújalo.

Sol: $-z_1=6_{240}=-3-3\cdot\sqrt{3}\,i$

c) Si z_1 es una de las soluciones de una ecuación de segundo grado con coeficientes reales. ¿Cuál será la otra solución?. Exprésalo en forma polar. Binómica y dibújalo.

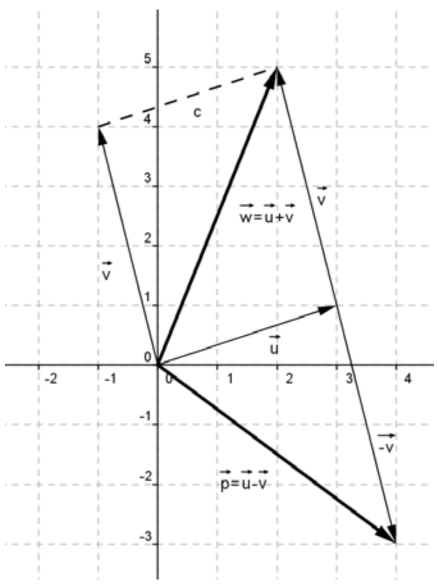
Sol: $z_2=6_{300}=3-3\cdot\sqrt{3}\,i$

d) Determina la ecuación de 2º grado cuyas soluciones son dichos complejos. Sol: $z^2-6z+36=0$

e) Si dicha ecuación es:. $z^2-6z+36=0$ Comprueba, resolviéndola, que la solución de la misma son dichos complejos..

Sol: $\begin{cases}z_1=3+3\sqrt{3}i\\ z_1=3-3\sqrt{3}i\end{cases}$

6.- En la gráfica observas los vectores los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Se te pide:



a) Obtén gráficamente los vectores: $\begin{cases}\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}\\ \vec{p}=\vec{u}-\vec{v}\end{cases}$. Utiliza la gráfica adjunta y comprueba analíticamente los resultados.

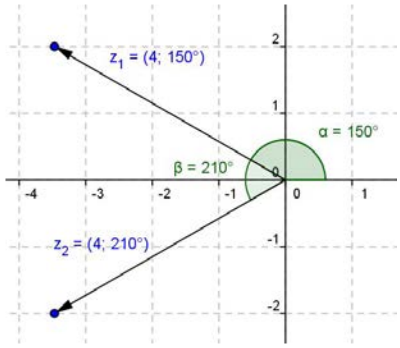
Sol: $\begin{cases}\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}=(2,5)\\ \vec{p}=\vec{u}-\vec{v}=(4,-3)\end{cases}$

b) Determina analíticamente el ángulo que forman.

Sol: $\alpha=85'60$

c) Expresa el vector $\vec{q}(7,-2)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. ¿Qué son los valores que has hallado?, Sol: $\vec{q}(7,-2)=2\cdot\vec{u}(3,1)-1\cdot(-1,4)$

7.-Dada la ecuación: $z^2 + 4\sqrt{3} \cdot z + 16 = 0$. Se te pide:



a) Resuélvela en el campo de los números complejos.

Sol: $z = -2\sqrt{3} \pm 2i$

b) Si una de las soluciones de dicha ecuación es $z_1 = -2\sqrt{3} + 2i$.

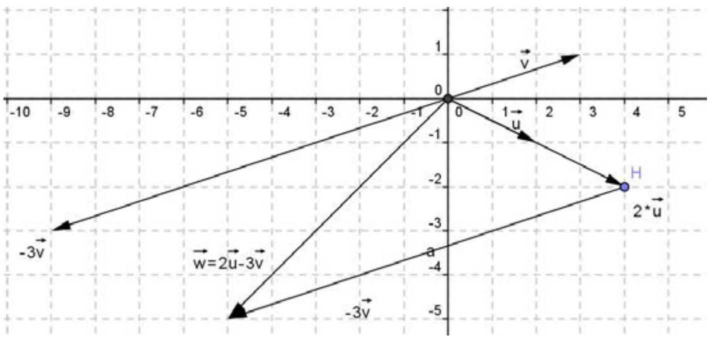
b1) Exprésala en forma polar y dibújala (aproximadamente) en le plano complejo adjunto.

Sol: $z_1 = 4_{150}$

b2) Porqué la otra solución deberá ser: $z_1 = -2\sqrt{3} + 2i$. Exprésala en forma polar y dibújala (aproximadamente). Sol: $z_2 = -2\sqrt{3} - 2i = 4_{210}$

c) Determina la ecuación de 2º grado cuyas soluciones son las indicadas. Sol: $z^2 + 4\sqrt{3} \cdot z + 16 = 0$

8.- Dados los vectores: $\vec{u} = (2, -1)$ y $\vec{v} = (3, 1)$ referidos a una base ortonormal. Se te pide:



a) Obtén gráficamente el vector $\vec{w} = 2\vec{u} - 3\vec{v}$. Utiliza para ello, la gráfica adjunta, y comprueba analíticamente el resultado obtenido.

Sol; $\vec{w} = (-5, -5)$

b) Determina analíticamente el ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

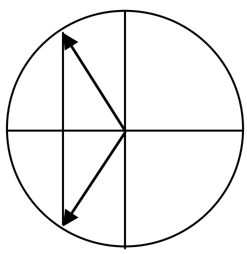
Sol: $\alpha = 45^o$

c) Expresa el vector $\vec{q}(2, 4)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. ¿Qué son los valores que has hallado?. Sol: $\vec{q}(2, 4) = -2 \cdot \vec{u}(2, -1) + 2 \cdot \vec{v}(3, 1)$

9.- Dada la ecuación: $x^2 + 2x + 4 = 0$. Se te pide:

a) Resuélvela en el conjunto de los números complejos. Sol: $\begin{cases} x_1 = -1 + \sqrt{3}i \\ x_2 = -1 - \sqrt{3}i \end{cases}$

b) Representa ambas soluciones en el plano complejo. Expresa dichas soluciones en forma polar.



Sol: $\begin{cases} x_1 = 2_{120^o} \\ x_1 = 2_{240^o} \end{cases}$

c) Si dichas soluciones son: $\begin{cases} x_1 = -1 + \sqrt{3}i \\ x_1 = -1 - \sqrt{3}i \end{cases}$. Obtén dicha ecuación.

Sol: $x^2 + 2x + 4 = 0$

10.- Dados los puntos: $A(-1,0)$, $B(3,-1)$ y $C(2,6)$. Se te pide:

a) Determina las componentes de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. ¿Forman una base?. ¿Son perpendiculares?. Razona la respuesta. Sol: $\overrightarrow{AB}=(4,-1)$ $\overrightarrow{AC}=(3,6)$

Formarán base si tienen distinta dirección, se deberá cumplir: $\frac{4}{3}\neq\frac{-1}{6}$. Que es cierto luego forman una base.

Para que sean perpendiculares su producto escalar deberá ser 0, es decir:

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4\cdot 3+(-1)\cdot 6=6\neq 0\rightarrow$ No son perpendiculares.

b) Determina el ángulo que forman ambos vectores. Sol: $\alpha=77{,}47^{\circ}$

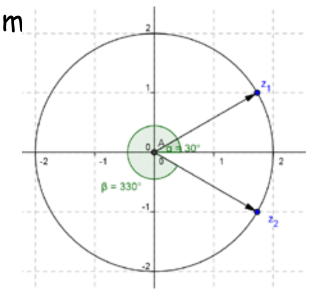
c) Expresar el vector $\vec{w}(2,13)$ como combinación lineal de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. ¿Qué son los valores hallados? $\vec{w}(2,13)=-1\cdot\overrightarrow{AB}(4,-1)+2\cdot\overrightarrow{AC}(3,6)$

Los valores hallados serán las componentes del vector $\vec{w}$, en la base que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

d) Determina un vector unitario y paralelo al vector $\overrightarrow{AB}$ Sol: $\vec{p}=\left(\frac{4\sqrt{17}}{17},\frac{-\sqrt{17}}{17}\right)$

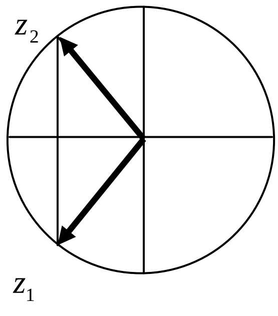
11- Dada la ecuación: $z^2-2\sqrt{3}\cdot z+4=0$. Resuélvela en el campo de los números com soluciones en forma binómica, polar y en forma gráfica.

$$\begin{cases} z_1=\sqrt{3}+i\rightarrow z_1=2_{30^{\circ}} \\ z_2=\sqrt{3}-i\rightarrow z_2=2_{330^{\circ}} \end{cases}$$



12.- Dados los complejos: $z_1=2_{240}$ y $z_2=-1+\sqrt{3}i$. Se te pide:

a) Expresa z_1 en forma binómica y z_2 en forma polar. Represéntalos en el plano complejo e indica la relación que existe entre ambos complejos, razona la respuesta. Sol: ***Ambos complejos son conjugados puesto que únicamente cambia el signo de la parte imaginaria y gráficamente son simétricos respecto al eje real.*** $\begin{cases} z_1=-1-\sqrt{3}i \\ z_2=2_{120} \end{cases}$



b) Si dichos complejos son las soluciones de una ecuación de 2º grado. ¿Qué característica tendrá dicha ecuación?. Determina la expresión de dicha ecuación y comprueba las soluciones resolviendo la ecuación resultante.

Sol: La ecuación tendrá los coeficientes reales. $z^2+2z+4=0$, Cuyas soluciones serán: $\begin{cases} z_1=-1-\sqrt{3}i \\ z_2=-1+\sqrt{3}i \end{cases}$

13.- Dados los vectores $\vec{a}(-1,3)$ y $\vec{b}(1,-2)$, referidos a una base ortonormal. Se te pide:

a) ¿Qué condición han de cumplir dos vectores para constituir una base en el plano cartesiano?. ¿Podrían constituir los vectores propuestos una base del plano cartesiano?

b) Un vector unitario con la misma dirección y sentido opuesto al vector $\vec{a}$. Sol: $\vec{c} = \left(\frac{\sqrt{10}}{10}, \frac{-3\sqrt{10}}{10}\right)$

b) Sea el vector $\vec{w}(-1,-12)$. Determina las coordenadas de dicho vector en la base formada por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$. Sol: $\vec{w}(-1,-12) = -14(-1,3) - 15(1,-2)$

14.- Dados los vectores $\vec{p}(2,-3)$ y $\vec{q}(-1,-2)$, referidos a una base ortonormal. Se te pide:

a) El ángulo que forman. Sol: $\left(\widehat{\vec{p}\,\vec{q}}\right) = 60{,}26^{\circ}$

b) La proyección del vector $\vec{p}$ sobre el vector $\vec{q}(-1,-2)$. Sol: $Proyección = \frac{4\sqrt{5}}{5}$

c) El módulo del vector $\vec{w} = \vec{p} - \vec{q}$. Sol: $\left|\vec{w}\right| = \sqrt{10}$

15.- Dados los puntos: $A(3,5)$ y $B(-1,3)$. Se te pide:

a) Determina el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$. Sol: $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 2\sqrt{5}$

a) Si el punto $C(5,k)$, determina el valor que deberá tomar k para que el punto C esté alienado con A y con B. Sol: $k = 6$

b) Halla el punto simétrico del punto A respecto al punto B Sol: $A'(-5,1)$

16.- La ecuación de una recta viene dada por: $3x + 2y - 6 = 0$. Se te pide:

a) Determina un punto y un vector de la recta. Sol: $\vec{v}_r = (-2,3)$

b) Expresa dicha recta de todas las formas que conozcas. Sol:

Vect.: $r \equiv \begin{cases} \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + t\cdot\vec{v}_r \\ (x,y) = (0,3) + t\cdot(-2,3) \end{cases}$ Par.: $r \equiv \begin{cases} x = 0 - 2t \\ y = 3 + 3t \end{cases}$ Cont.:

$$r \equiv \frac{x-0}{-2} = \frac{y-3}{3}$$

Gen.: $r \equiv 3x + 2y - 6 = 0$ Expl.: $r \equiv y = \frac{-3}{2}x + 3 \begin{cases} pendiente = m = \frac{-3}{2} \\ O.O. = n = 3 \end{cases}$ Red.: $r \equiv \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$

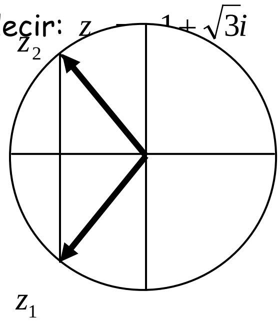
17.- Una de las soluciones de una ecuación de 2º grado con coeficientes reales es: $z_1 = -1 - \sqrt{3}i$. Se te pide:

a) ¿Qué otra solución tendrá necesariamente dicha ecuación?. ¿Cómo son entre sí dichas soluciones?. Sol: z_2 deberá ser la conjugada de la primera, es decir: $z_2 = -1 + \sqrt{3}i$

b) Determina la expresión correspondiente a dicha ecuación de 2º grado. Comprueba el resultado resolviendo la ecuación obtenida.

Sol: $z^2 + 2z + 4 = 0$

c) Expresa dichas soluciones en forma polar y represéntalas gráficamente en el plano complejo.



Sol-, $z_1 = 2_{240}$, $z_2 = 2_{120}$

18.- Dados los vectores $\vec{p}(2,-3)$ y $\vec{q}(-1,-2)$, referidos a una base ortonormal. Se te pide:

a) ¿Qué condición han de cumplir dos vectores para constituir una base ortonormal en el plano cartesiano?.¿Podrían constituir los vectores propuestos una base ortonormal del plano cartesiano? ¿Y de otro tipo?.

b) Un vector unitario perpendicular al vector $\vec{p}$. Sol: $\vec{s}=\left(\frac{\pm 3\sqrt{13}}{13},\frac{\pm 2\sqrt{13}}{13}\right)$

c) Sea el vector $\vec{w}(-7,0)$. Expresa dicho vector como combinación lineal de los vectores $\vec{p}$ y $\vec{q}$. Has obtenido dos valores, ¿Qué representan dichos valores?.

Sol: $\vec{w}(-7,0)=-2\cdot\vec{p}(2,-3)+3\cdot\vec{q}(-1,-2)$

19.- Dados los vectores $\vec{a}(-1,3)$ y $\vec{b}(1,-2)$, referidos a una base ortonormal. Se te pide:

a) El ángulo que forman. Sol: $\left(\vec{a}\,\vec{b}\right)=171{,}87^o$

b) La proyección del vector $\vec{a}$ sobre el vector $\vec{b}(1,-2)$. Sol: $Proy=3{,}57$

c) El módulo del vector $\vec{w}=\vec{a}-\vec{b}$. Sol: $\left|\vec{w}\right|=\sqrt{29}$

20.- Dados los puntos: $A(3,5)$ y $B(x,y)$. Se te pide:

a) Determina el valor de x e y para que se cumpla: $\overrightarrow{AB}(-4,-2)$.

Sol: $\begin{cases} x-3=-4\rightarrow x=-1 \\ y-5=-2\rightarrow y=3 \end{cases}\rightarrow B(-1,3)$

b) El punto $C(5,6)$, ¿Estará alineado con los puntos A y B?. Sol:

c) Halla el punto simétrico del punto C respecto al punto A. Sol: $C'(1,4)$

21.- La ecuación de una recta viene dada por la expresión: $r\equiv\frac{x}{-2}=\frac{y-3}{3}$. Se te pide:

a) ¿Cómo se llama esta forma?. Determina un punto y un vector de la recta

Sol: Es la forma continua: $\begin{cases} \vec{v}_r(-2,3) \\ P_r(0,3) \end{cases}$

b) Expresa dicha recta de todas las formas que conozcas.Sol: Vect.:

$$r\equiv\begin{cases} \overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OP}+t\cdot\vec{v}_r \\ (x,y)=(0,3)+t\cdot(-2,3) \end{cases}$$

Par.: $r\equiv\begin{cases} x=0-2t \\ y=3+3t \end{cases}$ Cont.: $r\equiv\frac{x-0}{-2}=\frac{y-3}{3}$ General: $r\equiv 3x+2y-6=0$

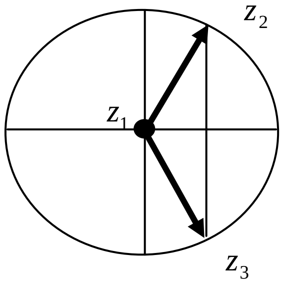
Expl.: $r\equiv y=\frac{-3}{2}x+3\begin{cases} pendiente=m=\frac{-3}{2} \\ O.O.=n=3 \end{cases}$ Red. $r\equiv\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$

22.- Dada la ecuación: $z^3 - 6z^2 + 25z = 0$

a) Resuelve dicha ecuación en el campo de los números complejos. *Sol:* $\begin{cases} z_2 = 3+4i \\ z_3 = 3-4i \end{cases}$

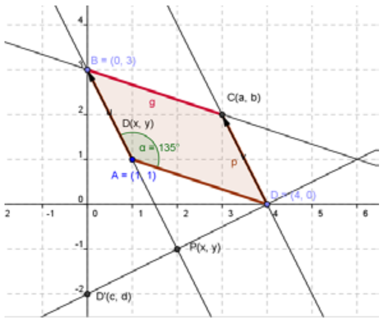
b) Expresa dichas soluciones en forma polar y represéntalas gráficamente.

Sol: $\begin{cases} z_1 = 0_0 \\ z_2 = 5_{53,13^\circ} \\ z_2 = 5_{306,87^\circ} \end{cases}$



c) Si las soluciones fueran: $z_1 = 0$, $z_2 = 3+4i$ y $z_3 = 3-4i$. Determina la ecuación de grado 3 de la que proceden. Sol: $z^3 - 6z^2 + 25z = 0$

23.- Los puntos $A(1,1)$, $B(0,3)$ y $D(4,0)$ son tres de los vértices del paralelogramo *ABCD*, Se te pide:



a) Determina las coordenadas de un punto *C* que forme con los anteriores el paralelogramo *ABCD*. Sol: $C(3,2)$

b) Expresa el vector $\vec{w}(-2,-1)$ como combinación lineal de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BD}$. ¿Qué puedes decir de los valores hallados?.

Sol: $\vec{w}(-2,-1) = -2 \cdot \overrightarrow{AB}(-1,\,2) - 1 \cdot \overrightarrow{BD}(4,-3)$

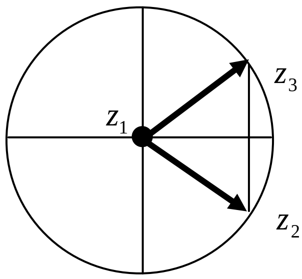
c) Calcula el valor del ángulo, del paralelogramo, correspondiente al vértice *A*. Sol: $\alpha = 135^\circ$

d) El punto *D'*, simétrico del punto *D* respecto a la recta que determinan los puntos *A y B*.

Sol: $D'(0,-2)$

e) Determina el área de dicho paralelogramo. Sol: $A = 5\,ua$

24.- Las soluciones de una ecuación de tercer grado, resuelta en el campo complejo son: son: $z_1 = 0$, $z_2 = \sqrt{3} - i$ y $z_3 = 2_{30}$. Se te pide:

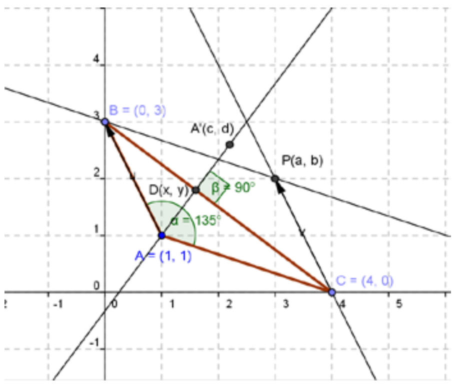


a) Expresa z_2 en forma polar y z_3 en forma binómica. Represéntalas gráficamente. Sol: $\begin{cases} z_2 = 2_{330^\circ} \\ z_3 = \sqrt{3} + i \end{cases}$

b) Obtén la ecuación de tercer grado de la que proceden dichas soluciones. Sol: $z^3 - 2\sqrt{3}z + 4z = 0$

c) Comprueba que dichas soluciones corresponden a las de la ecuación: $z^3 - 2\sqrt{3}z + 4z = 0$

25- Los puntos $A(1,1)$, $B(0,3)$ y $C(4,0)$ son los vértices del triángulo *ABC*, Se te pide:



a) Determina las coordenadas de un punto *P* que forme con los anteriores el paralelogramo *ABPC* Sol: $P(3,2)$

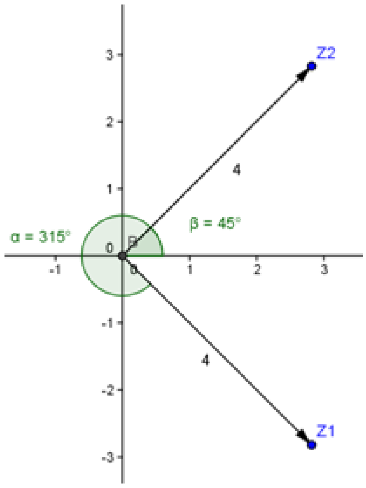
b) Expresa el vector $\vec{w}(7,-4)$ como combinación lineal de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. ¿Qué puedes decir de los valores hallados?. Sol: $\vec{w}(7,-4) = -1 \cdot \overrightarrow{AB}(-1,2) + 2 \cdot \overrightarrow{AC}(3,-1)$

c) Calcula el valor del ángulo, del triángulo, correspondiente al vértice *A*. Sol: $\alpha = 135^o$

d) El punto *A'*, simétrico del punto *A* respecto a la recta que determinan los puntos *B* y *C*. Sol: $A'\left(\frac{11}{2},\frac{13}{2}\right)$

e) Determina el área de dicho triángulo. Sol: $A = 2{,}5ua$

26.- El complejo representado gráficamente, resulta ser una de las soluciones de una ecuación de 2º grado con coeficientes reales. Se te pide:



a) Expresa dicha solución, sin usar la calculadora, en forma polar y en forma binómica. Sol: $z_1 = 4_{315} = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\cdot i$

b) ¿Cuál será la otra solución?. Representa gráficamente la 2ª solución y expresa dicha solución en forma polar y binómica

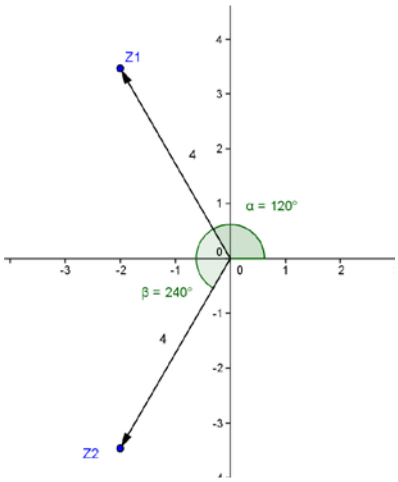
Sol: $z_2 = 4_{45} = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\cdot i$

c) Determina la ecuación de 2º grado cuyas soluciones son dichos complejos.

Sol: $z^2 - 4\sqrt{2}\cdot z + 16 = 0$

d) Si dicha ecuación es: $z^2 - 4\sqrt{2}z + 16 = 0$. Comprueba, resolviéndola, que la solución de la misma son dichos complejos. Sol: $\begin{cases} z_1 = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\cdot i \\ z_2 = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\cdot i \end{cases}$

27.- El complejo representado gráficamente, resulta ser una de las soluciones de una ecuación de 2º grado con coeficientes reales. Se te pide:



a) Expresa dicha solución, sin usar la calculadora, en forma polar y en forma binómica. Sol: $z_1 = 4_{120} = -2 + 2\sqrt{3}i$

b) ¿Cuál será la otra solución?. Representa gráficamente la 2ª solución y expresa dicha solución en forma polar y binómica.

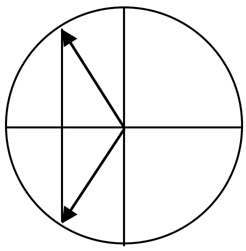
Sol: $z_2 = 4_{240} = -2 - 2\sqrt{3}i$

c) Determina la ecuación de 2º grado cuyas soluciones son dichos complejos. Sol: $z^2 + 4z + 16 = 0$

d) Si dicha ecuación es: $z^2 + 4z + 16 = 0$. Comprueba, resolviéndola, que la solución de la misma son dichos complejos.

Sol: $\begin{cases} z_1 = -2 + 2\sqrt{3}\cdot i \\ z_2 = -2 + 2\sqrt{3}\cdot i \end{cases}$

28.- .- Una de las raíces de una ecuación de 2º grado con coeficientes reales viene dada por la expresión: $x_1 = i^{10} - 2\cdot i^7$. Se te pide:



a) Expresa dicha solución en forma binómica y polar.

Sol: $x_1 = -1 + 2i = \sqrt{5}_{116,57}$

b) Determina la otra solución, razonando la respuesta. Sol: $x_2 = -1 - 2i$

c) Representa ambas soluciones en el plano complejo.

d) Si dichas soluciones son: $\begin{cases} x_1 = -1 + 2i \\ x_1 = -1 - 2i \end{cases}$. Obtén dicha ecuación y comprueba las soluciones

29.- Dados los vectores: $\vec{u}(2,1)$ y $\vec{v}(0,5)$ referidos a una base ortonormal. Se te pide:

a) ¿Formarían base?. ¿Serán perpendiculares?. Razona la respuesta. Sol:

b) Determina el ángulo que forman ambos vectores. Sol: $\alpha = 63,43^{o}$

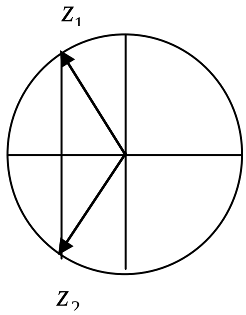
c) Expresar el vector $\vec{w}(4,7)$como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$. ¿Qué son los valores hallados?

Sol: $\vec{w}(4,7) = 2 \cdot \vec{u}(2,1) + 1 \cdot \vec{v}(0,5)$

d) Determina un vector unitario y perpendicular a $\vec{u}$ Sol: $\vec{p} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}} \right)$

30.- Dada la ecuación: $z^2 + 4z + 13 = 0$. Se te pide:

a) Resuélvela en el campo de los números complejos. Deberás dar el resultado en forma binómica, polar y en forma gráfica.Sol: $z_1 = -2 + 3i \rightarrow z_1 = \sqrt{13}_{123,69^{o}}$
$z_2 = -2 - 3i \rightarrow z_2 = \sqrt{13}_{236,31^{o}}$



b) Si las dos soluciones de una ecuación fueran: $\begin{cases} z_1 = -2 + 3i \\ z_2 = -2 - 3i \end{cases}$. Determina dicha ecuación. Sol: $z^2 + 4z + 13 = 0$

Complejos:

C1.- Resuelve en el campo de los números complejos la ecuación: $\left(z-2_{90}\right)\left(z^4-16\right)=0$. Expresa las soluciones en forma binómica y represéntalas gráficamente.

C2.- Opera y simplifica al máximo: $\dfrac{i^{10}-2i^{7}}{2+i^{33}}$.

C3.- Dados los complejos: $z_1=1+i$ y $z_2=\sqrt{2}_{315}$. Se te pide:

a) Representa gráficamente dichos vectores obteniendo, previamente, sus expresiones polar y binómica.

b) Si ambos valores son las soluciones de una ecuación de 2º grado. ¿Cómo tendrá los coeficientes dicha ecuación? (Razona la respuesta). Determina dicha ecuación.

Vectores

V1.-Dados los vectores, $\vec{u}=\overrightarrow{(3,4)}$ y $\vec{v}=\overrightarrow{(k,-1)}$, referidos a una base ortonormal. Determina el valor del parámetro "k", en los siguientes casos:

a) El vector $\vec{u}$, sea paralelo al vector $\vec{v}$.

b) El vector $\vec{u}$, sea perpendicular al vector $\vec{v}$.

c) El módulo del vector $\vec{v}$ sea $\sqrt{17}$.

d) Si $k=2$, determina un vector unitario y ortogonal al vector $\vec{v}$.

V2.- Dados los vectores, $\vec{u}=\overrightarrow{(8,6)}$y el vector $\vec{v}=\overrightarrow{(-3,-4)}$. Se te pide:

a) El ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{u}$.

b)Sea el vector $\vec{w}=\overrightarrow{(-10,5)}$, exprésalo como combinación lineal de los vectores $\vec{u}$, y $\vec{v}$.

V3.- Dados los vectores $\vec{u}=\overrightarrow{(2,-1)}$ y $\vec{v}=\overrightarrow{(k,4)}$ referidos a una base ortonormal. Se te pide:

a) Determina el valor que deberá tomar K para que ambos vectores sean perpendiculares.

b) Para $k=2$.:

b$_1$) Expresa el vector $\vec{w}=\overrightarrow{(2,\ 9)}$ como combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

b$_2$) Determina el ángulo que forman dichos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

V4.- Dado el vector $\vec{u}(-4,\,3)$. Se te pide:

a) Halla el vector unitario, paralelo y de sentido opuesto a $\vec{u}$.

b) Expresa el vector $\vec{w}(11,\,-12)$, Como combinación lineal del vector $\vec{u}$ anterior y el vector $\vec{v}(1,-2)$.

V5.- Dados los vectores: $\vec{u}(2,0)$ y $\vec{v}\left(1,\sqrt{3}\right)$. Se te pide:

a) Determina el ángulo que forman ambos vectores.

b) Expresar el vector $\vec{w}\left(1,-3\sqrt{3}\right)$como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

c) Determina un vector unitario y perpendicular a $\vec{v}$

V6.- 1a) Dados los vectores: $\vec{a}(4,-3)$ y $\vec{b}(-1,-2)$. Se te pide:

1a$_1$) ¿Qué condición han de cumplir 2 vectores para constituir una base?. ¿Forman $\vec{a}$ y $\vec{b}$ una base?. En caso afirmativo, ¿será Ortonormal? Razona la respuesta.

1a$_2$) Expresa el vector $\vec{c}(9,-4)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$

1a$_3$) Determina el vector unitario perpendicular al vector $\vec{a}$

1b) Calcula el ángulo formado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, sabiendo que $|\vec{u}|=2$, $|\vec{v}|=3$ y que $|\vec{u}-\vec{v}|=4$

V7.- Dados los vectores, $\vec{u}(-3,4)$ y $\vec{v}(x,-6)$, referidos a una base ortonormal. Se te pide.

a) Significado de base de vectores ortonormal.
b) De terminar el valor que deberá tomar el parámetro x para que los vectores $\vec{u}(-3,4)$ y $\vec{v}(x,-6)$ sean perpendiculares.
c) Si $x=-8$, Determina, las coordenadas que tendrá el vector $\vec{p}(-1,18)$ en la base que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

V8.- Dado el vector $\vec{u}(-6,8)$. De termina:

a) Un vector unitario y perpendicular a $\vec{u}$.
b) Expresa el vector $\vec{v}(8,6)$ como combinación lineal del vector $\vec{u}$ y el vector $\vec{w}(-3,2)$.

V9.- Dados los vectores: $\vec{u}(2,-3)$ y $\vec{v}(-1,2)$. Se te pide:

a) Expresar el vector $\vec{w}(-5,8)$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$. ¿Qué coordenadas tiene $\vec{w}$ en la base formado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$?
b) Determina el ángulo que forman ambos vectores.
c) Determina el vector perpendicular a $\vec{p}=\vec{v}-2\vec{u}$
d) Determina un vector unitario con la misma dirección que $\vec{u}$

V10-

a) Dados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Se te pide:
   a$_1$) ¿Qué condición han de cumplir para que formen una base de vectores en el plano?.
   a$_2$) ¿Y para que la base sea ortonormal?.
   a$_3$) Si $\vec{u}=2\vec{v}+3\vec{w}$. ¿Qué coordenadas tendrá el vector $\vec{w}$ en la base formada por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
   a$_4$) Si $\vec{u}(-1,2)$ y $\vec{v}(4,-1)$ son las coordenadas referidas una base ortonormal. Determina las coordenadas del vector $\vec{w}=2\vec{u}-3\vec{v}$ en dicha base y el módulo del vector $\vec{w}$.
b) Dados los vectores $\vec{a}(3,4)$ y $\vec{b}(-6,8)$ referidos a una base ortonormal. Expresa el vector $\vec{c}(7,8)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$

V11.- Dados los vectores: $\vec{u}\left(\sqrt{3}, 1\right)$ y $\vec{v}\left(x, -\sqrt{3},\right)$. Se te pide:

a) Determina el valor de " x " para que ambos vectores formen un ángulo de 150º.

c) ¿Formarán ambos vectores una base de vectores en el plano?. Razona la respuesta. ¿Será dicha base ortonormal?. Razona la respuesta.

b) Para $x = -1$, Determina las coordenadas del vector $\vec{w}\left(5, -\sqrt{3}\right)$ en la base de vectores formada por $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

V12.- Dados los puntos: $A(x, 3)$ y $B(3, x)$. Se te pide:

a) Determina el valor de " $x < 0$ " para que el módulo del vector $\vec{AB}$ sea $4\sqrt{2}$.

b) Si $x = -1$.

b1) La coordenadas del punto B', simétrico de B respecto de A.

b2) Coordenadas de los vectores unitarios perpendiculares al vector $\vec{AB}$.

b3) Dado el vector $\vec{v}(2,5)$Determina el ángulo que forma dicho vector con el vector $\vec{AB}$.

V13.- Dos de los tres vértices del triángulo ABC, se localizan en los puntos $A(-4, 2)$ y $B(2, 3)$. Además se sabe que el vector $\vec{AC}(2, -4)$. Se te pide:

a) Determina las coordenadas del punto C.

b) Expresa el vector $\vec{AC}$ como combinación lineal de los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{CB}$.

Recta I

R1.- La recta $r: \begin{cases} x = a - 5t \\ y = -3 + 2t \end{cases}$ pasa por el punto $P(-3, -1)$. Se te pide:

a) Determina el valor de "a"

b) Para "a"$= 2$. Determina su ecuación general.

R2.- Una recta viene dada por las siguiente expresión: $r \equiv \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 3 - 3t \end{cases}$; $t \in R$. Se te pide:

a) Determina las coordenadas de 2 puntos y un vector director de la recta propuesta.

b) Obtén las expresiones correspondientes a las diferentes formas en que se puede expresar dicha recta.

c) Obtén el valor de la pendiente y los cortes con los ejes correspondientes a dicha recta.

d) Dibuja dicha recta y un vector director de ella.

R3.- Los puntos $A(2,3)$, $B(-4,5)$ y $C(-1,-2)$, son los vértices de un triángulo. Se te pide:

a) Ecuación de la recta que determinan los vértices A y B.

b) Determinas las coordenadas del punto D que forma con los puntos anteriores el paralelogramo $ABCD$.

c) Punto medio del segmento que determinan los puntos A y C. Comprueba que coincide con el punto medio de los puntos B y D.

d) Punto simétrico de A respecto a B y de B respecto a A.

R4.- Sea "r" la recta que pasas por los puntos A(-2,3) y B(1,0).y "s" otra recta que es perpendicular al vector (2,1) y que pasa por el punto (-1,6). Determina las ecuaciones de ambas rectas.

R5.- Sean las rectas: $r_1 \equiv \begin{cases} x = 3 - t \\ y = -2 + 2t \end{cases}$, $r_2 \equiv 3x - y - 1 = 0$ y $r_3 \equiv \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{8} = 1$. Se te pide:

Expresa dichas rectas de todas las formas posibles.

R6.- Los puntos $A(1,-1)$, $B(5,0)$ y $C(0,6)$ se corresponden con los vértices del triángulo ABC. Determina las ecuaciones de las rectas que contienen a los lados del triángulo.